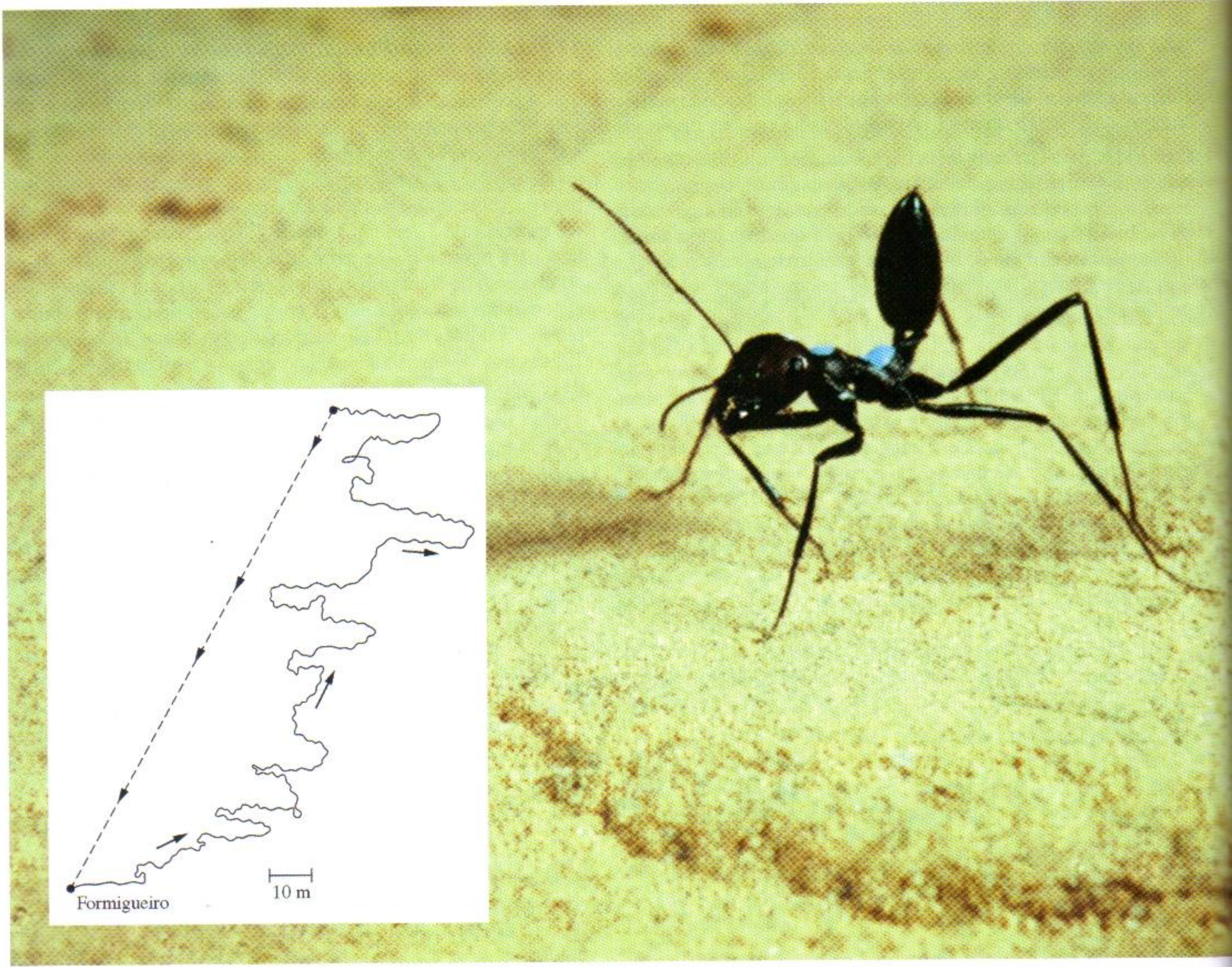
3 Vetores



Cortesia de Rudiger Wehner, Zoologisches Institut der Universitat Zurich

A formiga do deserto Cataglyphis fortis *vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento percorre um caminho aleatório, como mostra a figura. A formiga pode viajar mais de 500 m em uma superfície arenosa, sem qualquer ponto de referência. Mesmo assim, na hora de voltar ao formigueiro ela ruma diretamente para casa.*

Como uma formiga consegue encontrar o caminho de casa se não há pontos de referência no deserto?

A resposta está neste capítulo.

3-1 O QUE É FÍSICA?

A física lida com um grande número de grandezas que possuem amplitude e orientação, e para isso precisa de uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores, para descrever essas grandezas. Essa linguagem também é usada na engenharia, em outras ciências e até mesmo nas conversas do dia-a-dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", usou a linguagem dos vetores. Na verdade, qualquer tipo de navegação se baseia em vetores, mas a física e a engenharia também usam vetores para descrever fenômenos que envolvem rotações e forças magnéticas, como veremos em capítulos posteriores. Neste capítulo, vamos discutir a linguagem básica dos vetores.

3-2 | Vetores e Escalares

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas uma direção. Podemos considerar o deslocamento como positivo em uma dessas direções e negativo na outra. No caso de uma partícula que se move em três dimensões, porém, um número positivo ou negativo não é suficiente para indicar a orientação; precisamos usar um *vetor*.

Um **vetor** possui um módulo e uma orientação; os vetores seguem certas regras de combinação, que serão discutidas neste capítulo. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que possui um módulo e uma orientação e pode, portanto, ser representada por um vetor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezas físicas vetoriais. Como neste livro serão apresentadas muitas outras grandezas vetoriais, o conhecimento das regras de combinação de vetores será de grande utilidade para o leitor.

Nem toda grandeza física envolve uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo, por exemplo, não "apontam" em nenhuma direção. Chamamos essas grandezas de **escalares**, e lidamos com elas pelas regras da álgebra comum. Um único valor, com um sinal (como no caso de uma temperatura de –2°C), pode ser usado para especificar um escalar.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou mudança de posição. Um vetor que representa um deslocamento é chamado, como seria de se esperar, de **vetor deslocamento**. (Outros exemplos de vetores são os vetores velocidade e o vetor aceleração.) Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na Fig. 3-1*a*, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que representamos por uma seta apontando de A para B. A seta especifica o vetor graficamente. Para distinguir símbolos vetoriais de outros tipos de setas neste livro usamos um triângulo vazado na ponta das setas que representam vetores.

Na Fig. 3-1*a*, as setas de A para B, de A' para B' e de A'' para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma *variação de posição* da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude *se* o comprimento, a direção e o sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória percorrida por uma partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o da Fig. 3-1*a*. Um vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento, não o movimento propriamente dito.

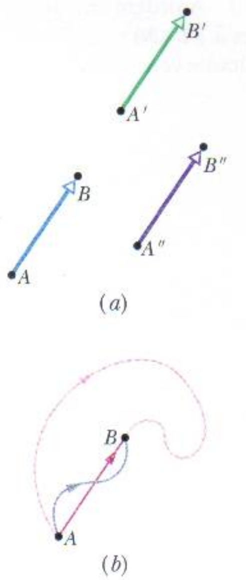


FIG. 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que unem os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

3-3 | Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2*a*, uma partícula se desloque de A a B e depois de B a C. Podemos representar o deslocamento total (independentemente da trajetória seguida) através de dois vetores deslocamento sucessivos, AB e

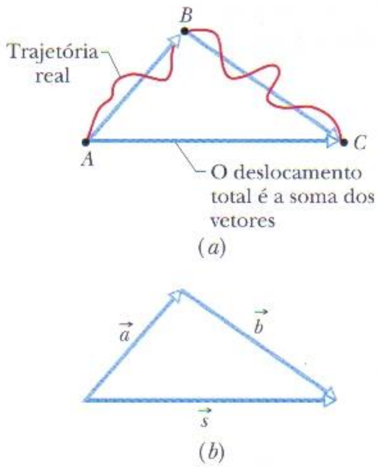


FIG. 3-2 (*a*) AC é o vetor soma dos vetores AB e BC. (*b*) Os mesmos vetores com outros nomes.

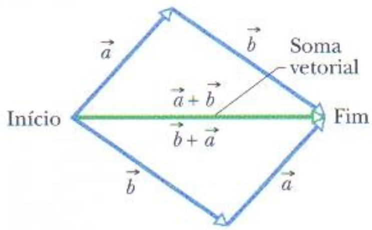


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

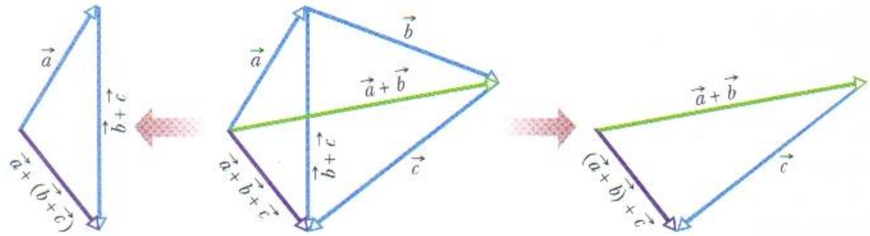


FIG. 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

BC. O deslocamento *total* é um único deslocamento de *A* para *C*. Chamamos *AC* de **vetor soma** (ou **vetor resultante**) dos vetores *AB* e *BC*. Esta soma não é uma soma algébrica comum.

Na Fig. 3-2*b* redesenhamos os vetores da Fig. 3-2*a* e os rotulamos da forma que será usada daqui em diante, com uma seta sobre um símbolo em itálico, como $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva e sem direção) usamos o símbolo do vetor em itálico sem a seta, como *a*, *b* e *s*. (Você pode usar simplesmente um símbolo manuscrito.) Uma seta sobre um símbolo indica que a grandeza representada pelo símbolo possui as propriedades de um vetor: módulo e orientação.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-2*b* através da *equação vetorial*

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}, \tag{3-1}$$

segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na Eq. 3-1 e a palavra "soma" têm um significado diferente no caso dos vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, eles envolvem tanto o módulo como a direção e o sentido da grandeza.

A Fig. 3-2 sugere um método para somar geometricamente dois vetores bidimensionais $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (1) Desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e no ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também no ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$.

A soma de vetores, definida dessa forma, tem duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que os vetores são somados é irrelevante. Somar $\vec{a}$ a $\vec{b}$ é o mesmo que somar $\vec{b}$ a $\vec{a}$ (Fig. 3-3), ou seja,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(lei comutativa).} \tag{3-2}$$

Em segundo lugar, quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos primeiro somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e depois somar o resultado a $\vec{c}$. Podemos também somar primeiro $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado a $\vec{a}$; o resultado é o mesmo, como mostra a Fig. 3-4. Assim,

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(lei associativa).} \tag{3-3}$$

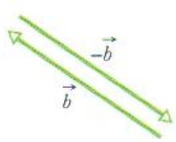


FIG. 3-5 Os vetores $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

O vetor $-\vec{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto (veja a Fig. 3-5). A soma dos dois vetores na Fig. 3-5 é

$$\vec{b}+(-\vec{b})=0$$

Assim, somar $-\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$. Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Se $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, temos:

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores);} \tag{3-4}$$

ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A Fig. 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para o outro, mas devemos mudar o sinal. Assim, por exemplo, para explicitar $\vec{a}$ na Eq. 3-4 escrevemos a equação na forma

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\vec{d}+\vec{b}$$

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a vetores de qualquer tipo, sejam eles usados para representar velocidade, aceleração ou qualquer outra grandeza vetorial. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo podem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares isso seria como tentar somar 21 s e 12 m.

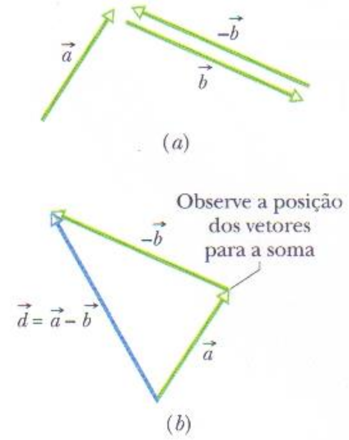


FIG. 3-6 (*a*) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (*b*) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

TESTE 1 Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Exemplo 3-1

Em uma prova de orientação você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a) $\vec{a}$, 2,0 km para leste; (b) $\vec{b}$, 2,0 km 30° ao norte do leste; (c) $\vec{c}$, 1,0 km para oeste. Você pode também substituir $\vec{b}$ por $-\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $-\vec{c}$. Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

Raciocínio: Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ e $-\vec{c}$, como na Fig. 3-7*a*. Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a sua orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma, $\vec{d}$. A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma $\vec{d}$ vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo d do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$. A ordem em

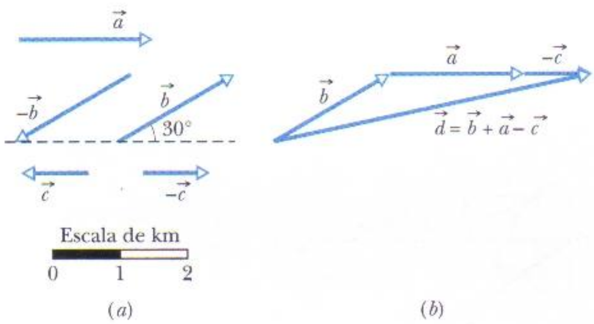


FIG. 3-7 (*a*) Vetores deslocamento; três deles devem ser usados. (*b*) A distância do acampamento é a maior possível se os deslocamentos escolhidos são $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{c}$, em qualquer ordem.

que esses vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Fig. 3-7*b* é para a soma vetorial

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})$$

Usando a escala da Fig. 3-7*a* medimos o comprimento d do vetor resultante, encontrando

$$d = 4{,}8 \text{ m.} \qquad \text{(Resposta)}$$

3-4 | Componentes de Vetores

Somar vetores geometricamente pode ser uma tarefa tediosa. Uma técnica mais elegante e mais simples envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são normalmente desenhados no plano do papel, como na Fig. 3-8*a*. O eixo z é perpendicular ao papel; vamos ignorá-lo, por enquanto, e tratar apenas de vetores bidimensionais.

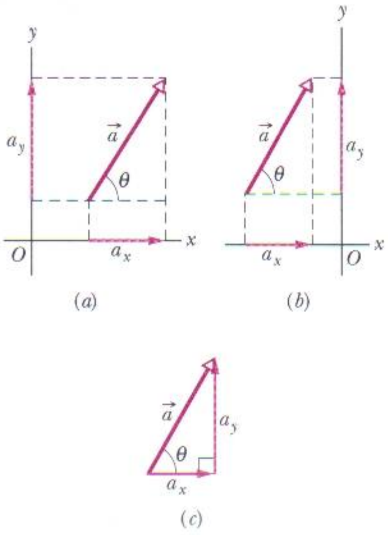


FIG. 3-8 (a) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (b) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (c) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

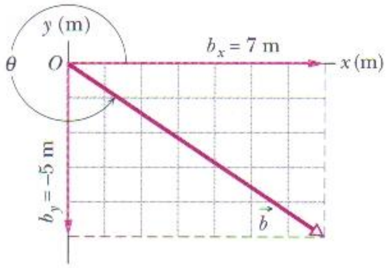


FIG. 3-9 A componente de $\vec{b}$ em relação ao eixo x é positiva e a componente em relação ao eixo y é negativa.

Uma **componente** de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na Fig. 3-8*a*, por exemplo, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em relação a um eixo traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor, como mostra a figura. A projeção de um vetor em relação a um eixo x é chamada de *componente x* do vetor; analogamente, a projeção em relação ao y recebe o nome de *componente y*. O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**.

Uma componente de um vetor tem o mesmo sentido (em relação a um eixo) que o vetor. Na Fig. 3-8, a_x e a_y são positivas porque $\vec{a}$ aponta no sentido positivo dos dois eixos. (Observe as setas das componentes, que mostram seus sentidos.) Se tivéssemos invertido o sentido do vetor $\vec{a}$, as componentes seriam negativas e as setas apontariam no sentido negativo dos eixos x e y. A decomposição do vetor $\vec{b}$ da Fig. 3-9 leva a uma componente b_x positiva e a uma componente b_y negativa.

No caso mais geral, um vetor tem três componentes; para o vetor da Fig. 3-8*a*, porém, a componente z é nula. Como mostram as Figs. 3-8*a* e *b*, quando deslocamos um vetor sem mudar sua orientação as componentes não mudam.

Podemos determinar geometricamente as componentes de $\vec{a}$ na Fig. 3-8*a* a partir do triângulo retângulo mostrado na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a \operatorname{sen}\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semi-eixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$. A Fig. 3-8*c* mostra que $\vec{a}$ e suas componentes x e y formam um triângulo retângulo. A figura mostra também como é possível reconstruir um vetor a partir das componentes: basta posicionar a origem de uma das componentes na extremidade da outra e completar o triângulo retângulo ligando a origem de segunda componente à extremidade da primeira.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ da Fig. 3-8*a* é dado (completamente determinado) por a e θ, mas também pode ser dado pelas componentes a_x e a_y. Os dois pares de valores contêm a mesma informação. Se conhecemos um vetor na *notação de componentes* (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na *notação módulo-ângulo* (a e θ), podemos usar as equações

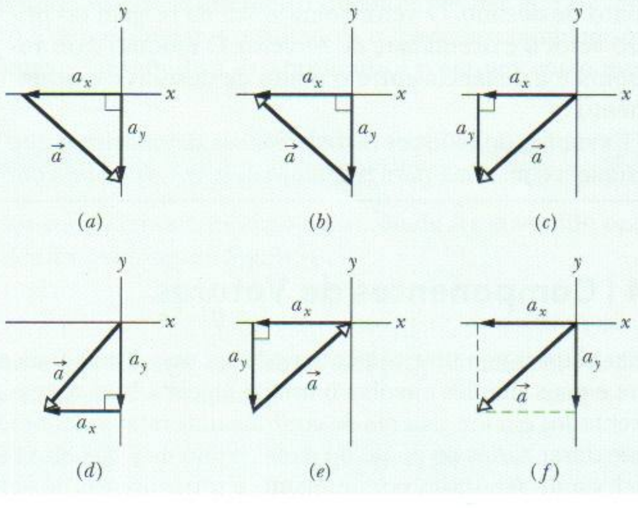
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{3-6}$$

para efetuar a transformação.

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ e ϕ, digamos) ou de três componentes (a_x, a_y e a_z) para especificar um vetor.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para se determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes x e y?



Exemplo 3-2

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

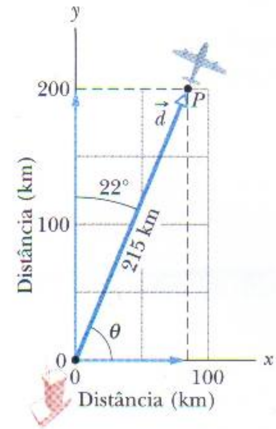


FIG. 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto *P*.

IDÉIA-CHAVE Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos: Desenhamos um sistema de coordenadas *xy* com o sentido positivo de *x* para leste e o de *y* para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$:

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°) = 81\text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°) = 199\text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Exemplo 3-3

Durante duas décadas, equipes especializadas de espeleólogos procuraram uma ligação entre o sistema de cavernas de Flint Ridge e a Mammoth Cave, no estado americano de Kentucky. Quando a ligação finalmente foi descoberta, o sistema combinado foi declarado a caverna mais longa do mundo (mais de 200 km de extensão). A equipe que encontrou a ligação teve que rastejar, escalar e se contorcer em inúmeras passagens, deslocando-se 2,6 km para oeste, 3,9 km para o sul e 25 m para cima. Qual foi o deslocamento do início ao fim?

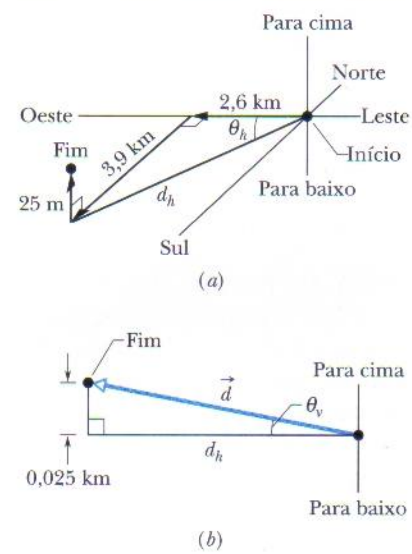


FIG. 3-11 (*a*) Componentes do deslocamento total da equipe de espeleólogos e o deslocamento horizontal d_h. (*b*) Vista lateral, mostrando d_h e o vetor deslocamento total da equipe, $\vec{d}$.

IDÉIA-CHAVE Temos as componentes de um vetor tridimensional e precisamos determinar o módulo do vetor e dois ângulos para especificar a sua orientação.

Componentes Horizontais: Para começar, desenhamos as componentes como na Fig. 3-11*a*. As componentes horizontais (2,6 km para oeste e 3,9 km para o sul) são os catetos de um triângulo retângulo. O deslocamento horizontal da equipe é a hipotenusa do triângulo, e o módulo d_h é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\text{ km})^2 + (3{,}9\text{ km})^2} = 4{,}69\text{ km}.$$

Também de acordo com o triângulo da Fig. 3-11*a*, o ângulo θ_h deste deslocamento horizontal ao sul do oeste é dado por

$$\tan\theta_h = \frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}}$$

e portanto

$$\theta_h = \tan^{-1}\frac{3{,}9\text{ km}}{2{,}6\text{ km}} = 56°, \qquad \text{(Resposta)}$$

que é um dos dois ângulos de que necessitamos para especificar a orientação do deslocamento.

Deslocamento Total: Para levar em conta a componente vertical (25 m = 0,025 km), desenhamos uma vista lateral dos vetores da Fig. 3-11*a*, olhado para noroeste. O resultado é a Fig. 3-11*b*, onde a componente vertical e o deslocamento horizontal d_h são os catetos de outro triângulo retângulo. O deslocamento total da equipe é a hipotenusa desse retângulo, com um módulo *d* dado por

$$d = \sqrt{(4{,}69\ \text{km})^2 + (0{,}025\ \text{km})^2} = 4{,}69\ \text{km}$$
$$\approx 4{,}7\ \text{km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O ângulo desse deslocamento para cima em relação ao deslocamento horizontal é dado por

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{0{,}025\ \text{km}}{4{,}69\ \text{km}} = 0{,}3^\circ. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o vetor deslocamento da equipe teve um módulo de 4,7 km, um ângulo de 56° ao sul do oeste e um ângulo de 0,3° para cima. O deslocamento para cima, naturalmente, foi insignificante em comparação com o deslocamento horizontal. Entretanto, esse fato não tornou mais fácil o trabalho da equipe, que teve que subir e descer várias vezes durante o percurso. O caminho seguido pela equipe foi, na verdade, muito diferente do indicado pelo vetor deslocamento.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 1: *Ângulos – Graus e Radianos* Ângulos medidos em relação ao semi-eixo x positivo são positivos se forem medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e −150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (rad). Para relacionar as duas medidas, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360°, ou 2π rad. Para converter, por exemplo, 40° para radianos, escrevemos

$$40^\circ \frac{2\pi\ \text{rad}}{360^\circ} = 0{,}70\ \text{rad}.$$

Tática 2: *Funções Trigonométricas* Você precisa conhecer as definições das funções trigonométricas mais comuns (seno, co-seno e tangente), porque elas são muito usadas na ciência e na engenharia. Elas são dadas na Fig. 3-12 para um triângulo retângulo genérico.

Você também deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo, como mostra a Fig. 3-13, para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em certas circunstâncias, o simples conhecimento dos sinais das funções nos vários quadrantes pode ser bastante útil.

Tática 3: *Funções Trigonométricas Inversas* Quando as funções trigonométricas inversas sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$ são fornecidas por uma calculadora você deve ser capaz de dizer se os resultados são razoáveis ou não, pois em geral existe uma outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao determinar os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-13. Assim, por exemplo, $\text{sen}^{-1}(0{,}5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para observar os dois valores, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na Fig. 3-13a, e verifique os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a }\theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{cateto adjacente a }\theta}$$

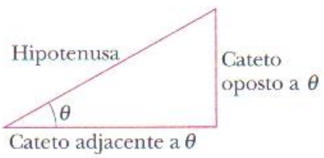


FIG. 3-12 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

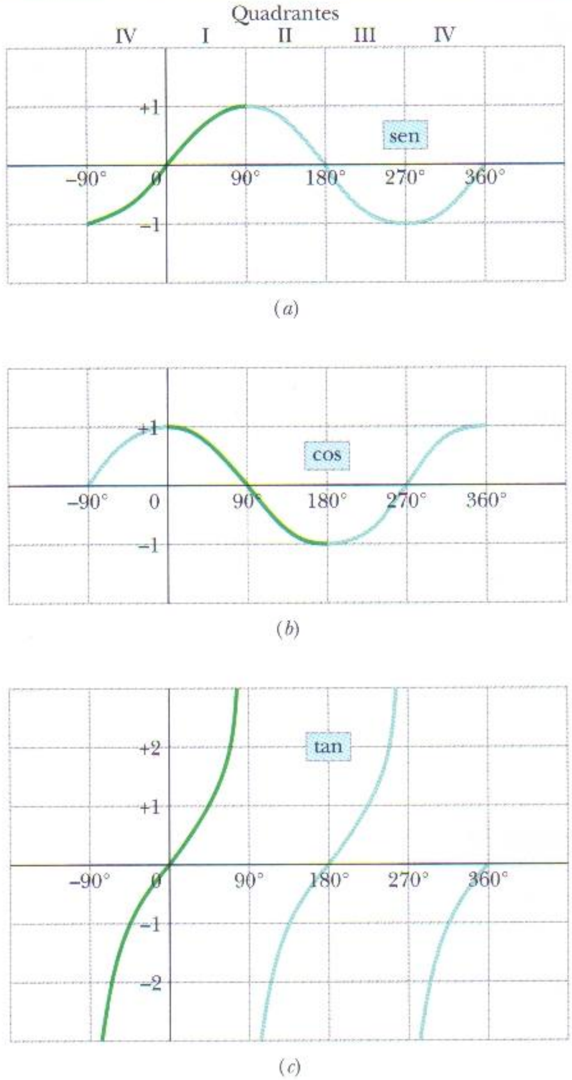


FIG. 3-13 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas inversas.

Como é possível saber a resposta correta? Ela é a que parece mais razoável para uma dada situação. Considere, por exemplo, o cálculo de θ_h no Exemplo 3-3, no qual $\tan\theta_h = 3{,}9/2{,}6 = 1{,}5$. Uma calculadora fornece para $\tan^{-1}(1{,}5)$ o valor de 56°, mas $\theta_h = 236°$ (= 180° + 56°) também tem uma tangente igual a 1,5. Qual das duas soluções é a correta? Examinando a situação física (Fig. 3-11a), vemos que 56° é um valor razoável, e que o mesmo não acontece com 236°.

Tática 4: Medida dos Ângulos de um Vetor As expressões de cos θ e sen θ na Eq. 3-5 e de tan θ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semi-eixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semi-eixo x positivo.

3-5 | Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z são representados como $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, respectivamente, sendo o símbolo ^ usado em lugar de uma seta (Fig. 3-14) para mostrar que se trata de vetores unitários. Um sistema de eixos como o da Fig. 3-14 é chamado de **sistema de coordenadas dextrogiro**. O sistema permanece dextrogiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que ela seja. Os sistemas de coordenadas usados neste livro são todos deste tipo.

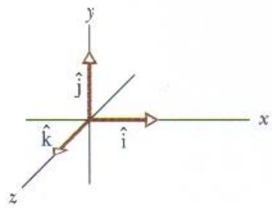


FIG. 3-14 Os vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; assim, por exemplo, podemos expressar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das Figs. 3-8 e 3-9 como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} \tag{3-7}$$

e

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath}. \tag{3-8}$$

Essas duas equações estão ilustradas na Fig. 3-15. As grandezas $a_x\hat{\imath}$ e $a_y\hat{\jmath}$ são vetores conhecidos como **componentes vetoriais** de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares conhecidos como **componentes escalares** (ou, simplesmente, **componentes**) de $\vec{a}$.

Como exemplo, vamos escrever o deslocamento $\vec{d}$ da equipe de espeleólogos do Exemplo 3-3 em termos de vetores unitários. Para começar, superpomos o sistema de coordenadas da Fig. 3-14 ao da Fig. 3-11*a*. Dessa forma, as orientações de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ são para leste, para cima e para o sul, respectivamente. Assim, o deslocamento $\vec{d}$ do início ao fim é expresso em termos dos vetores unitários como

$$\vec{d} = -(2{,}6\text{ km})\hat{\imath} + (0{,}025\text{ km})\hat{\jmath} + (3{,}9\text{ km})\hat{k}. \tag{3-9}$$

onde $-(2{,}6\text{ km})\hat{\imath}$ é a componente vetorial $d_x\hat{\imath}$ do vetor em relação ao eixo x e $-(2{,}6\text{ km})$ é a componente x do vetor, d_x.

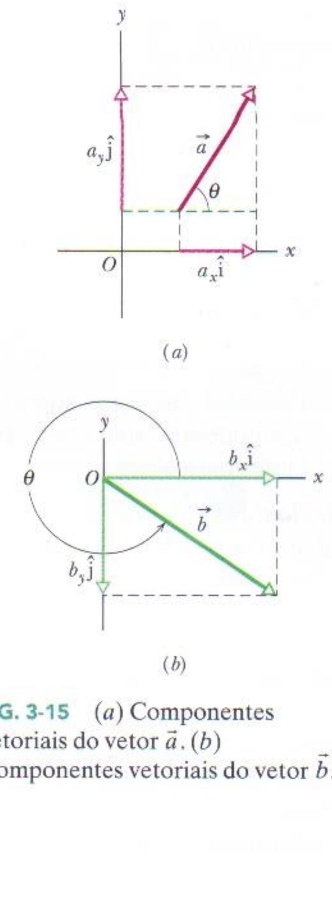


FIG. 3-15 (*a*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (*b*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

3-6 | Soma de Vetores através de Suas Componentes

Usando um desenho, podemos adicionar vetores geometricamente. Em uma sofisticada calculadora podemos somá-los diretamente na tela. Uma terceira forma de somar vetores é combinar suas componentes eixo por eixo, que é a forma que discutiremos em seguida.

Para começar, considere a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-10}$$

segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor $(\vec{a} + \vec{b})$. Isso significa que cada componente de $\vec{r}$ deve ser igual à componente correspondente de $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3-11}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3-12}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-13}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais se suas componentes correspondentes forem iguais. As Eqs. 3-10 a 3-13 nos dizem que, para somar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, devemos (1) obter as componentes escalares dos vetores; (2) combinar essas componentes escalares, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma, $\vec{r}$; (3) combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter o vetor $\vec{r}$. Isto pode ser feito de duas maneiras:

podemos expressar $\vec{r}$ em termos dos vetores unitários (como na Eq. 3-9) ou através da notação módulo-ângulo (como na resposta do Exemplo 3-3).

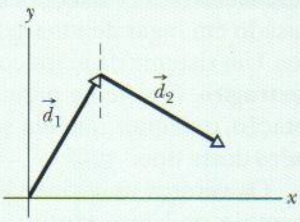
Este procedimento para somar vetores através de suas componentes também se aplica à subtração. Lembre-se de que uma subtração como $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pode ser escrita como uma adição da forma $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Para subtrair, somamos as componentes de $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ para obter

$$d_x = a_x - b_x,\ d_y = a_y - b_y,\ \text{e}\ d_z = a_z - b_z,$$

onde

$$\vec{d} = d_x\hat{\mathrm{i}} + d_y\hat{\mathrm{j}} + d_z\hat{\mathrm{k}}.$$

TESTE 3 (a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura ao lado? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



Exemplo 3-4

A Fig. 3-16*a* mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} - (1{,}5\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (2{,}9\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$, que também aparece na Fig. 3-16*a*?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando suas componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\ \mathrm{m} - 1{,}6\ \mathrm{m} + 0 = 2{,}6\ \mathrm{m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\ \mathrm{m} + 2{,}9\ \mathrm{m} - 3{,}7\ \mathrm{m} = -2{,}3\ \mathrm{m}.$$

Podemos então combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} - (2{,}3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{i}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao longo do eixo x, e $-(2{,}3\ \mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-16*b* mostra uma forma de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

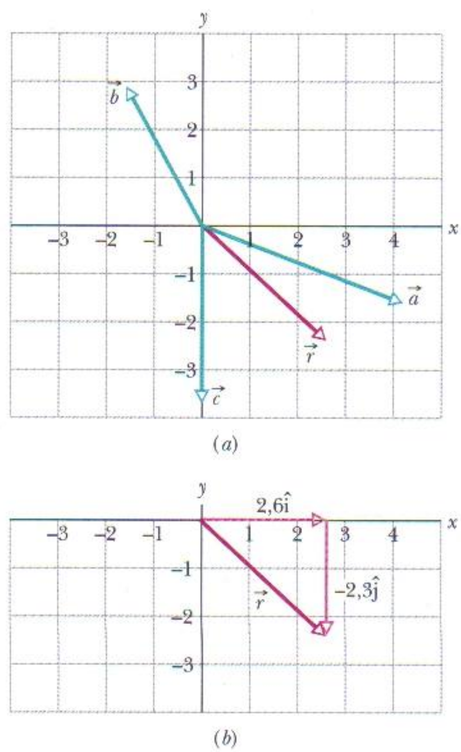


FIG. 3-16 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

$$r = \sqrt{(2{,}6\ \mathrm{m})^2 + (-2{,}3\ \mathrm{m})^2} \approx 3{,}5\ \mathrm{m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\ \mathrm{m}}{2{,}6\ \mathrm{m}}\right) = -41^\circ \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo 3-5

De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mostrada na fotografia de abertura deste capítulo mantém um registro dos seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro soma seus deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na Fig. 3-17a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{tot}$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro?

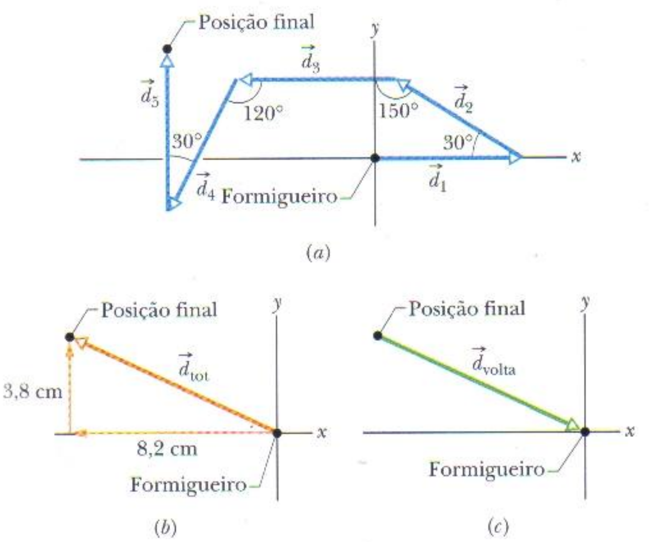


FIG. 3-17 (a) Movimentos de uma formiga do deserto. (b) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (c) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente x,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \tag{3-14}$$

e apenas para a componente y,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \tag{3-15}$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir de suas componentes x e y.

Cálculos: Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a x da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 0° = +6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 150° = -5{,}2 \text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 180° = -6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{4x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos(-120°) = -3{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0 \text{ cm} + (-5{,}2 \text{ cm}) + (-6{,}0 \text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0 \text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8 \text{ cm}.$$

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-17b. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$d_{tot} = \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2}$$
$$= \sqrt{(-8{,}2 \text{ cm})^2 + (3{,}8 \text{ cm})^2} = 9{,}0 \text{ cm}.$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semi-eixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8 \text{ cm}}{-8{,}2 \text{ cm}}\right) = -24{,}86°.$$

TABELA 3-1

Mov.	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6,0	0
2	−5,2	+3,0
3	−6,0	0
4	−3,0	−5,2
5	0	+6,0
total	−8,2	+3,8

Atenção: Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas 3, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta −24,86° parece indicar que vetor $\vec{d}_{tot}$ está no quarto quadrante de nosso sistema de coordenadas xy. Entretanto, quando compomos o vetor a partir das componentes (Fig. 3-17b) vemos que $\vec{d}_{tot}$ está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180°:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°.$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0 \text{ cm a } 155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto

(Fig. 3-17c). Já temos o ângulo ($-24{,}86° \approx -25°$) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm a } -25°. \quad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de deslocamentos. Ainda assim, de alguma forma ela é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

Exemplo 3-6 Aumente sua capacidade

Aqui está um problema de soma vetorial que *não pode* ser resolvido diretamente em uma calculadora. Uma amiga se afasta de você em linha reta (vetor $\vec{A}$), muda de direção, caminha novamente em linha reta (vetor $\vec{B}$) e pára. Que distância você deve caminhar em linha reta (vetor $\vec{C}$) para chegar até ela?

Os três vetores (que aparecem na Fig. 3-18) estão relacionados pela equação

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \quad (3\text{-}16)$$

O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 22,0 m e faz um ângulo de $-47{,}0°$ (sentido horário) com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{B}$ tem um módulo de 17,0 m e faz um ângulo ϕ (no sentido anti-horário) com o semi-eixo x positivo. Qual é o módulo de $\vec{C}$?

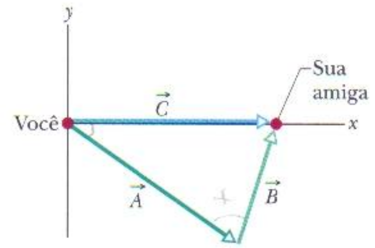


FIG. 3-18 O vetor $\vec{C}$ é igual a $\vec{A} + \vec{B}$.

IDÉIA-CHAVE Não podemos responder à pergunta somando vetorialmente $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em uma calculadora, mesmo que ela seja capaz de executar uma instrução como

[módulo de $\vec{A} \angle$ ângulo de $\vec{A}$] + [módulo de $\vec{B} \angle$ ângulo de $\vec{B}$]

porque não conhecemos o valor do ângulo ϕ de $\vec{B}$. Entretanto, *podemos* expressar a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x e ao eixo y.

Cálculos: Escrevendo a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo x, temos:

$$C_x = A_x + B_x.$$

Expressando as componentes x de acordo com a parte referente a x da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \cos 0° = 22{,}0 \cos(-47{,}0°) + 17{,}0 \cos \phi. \quad (3\text{-}17)$$

Esta equação não é suficiente para resolver o problema, já que não podemos calcular o valor de C sem conhecer ϕ.

Vamos escrever a Eq. 3-16 em termos das componentes em relação ao eixo y:

$$C_y = A_y + B_y.$$

Expressando as componentes y de acordo com a parte referente a y da Eq. 3-5 e substituindo os valores conhecidos, obtemos:

$$C \operatorname{sen} 0° = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi,$$

o que nos dá

$$0 = 22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°) + 17{,}0 \operatorname{sen} \phi.$$

Explicitando ϕ, obtemos

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} - \frac{22{,}0 \operatorname{sen}(-47{,}0°)}{17{,}0} = 71{,}17°$$

Substituindo este valor na Eq. 3-17, temos:

$$C = 20{,}5 \text{ m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Observe a técnica usada para resolver o problema: Quando chegamos a um beco sem saída ao trabalhar com as componentes x, usamos as componentes y para determinar o valor de ϕ. Em seguida, voltamos a trabalhar com as componentes x para calcular o valor de C.

3-7 | Vetores e as Leis da Física

Até agora, em toda figura em que aparece um sistema de coordenadas os eixos x e y são paralelos às bordas do papel. Assim, quando um vetor $\vec{a}$ é desenhado suas componentes a_x e a_y também são paralelas às bordas do papel (como na Fig. 3-19a). A única razão para usar esta orientação dos eixos é que ela parece "apropriada"; não existe uma razão mais profunda. Podemos perfeitamente girar os eixos (mas não o vetor $\vec{a}$) de um ângulo ϕ, como na Fig. 3-19b, caso em que as componentes terão novos valores, a'_x e a'_y. Como existe uma infinidade de valores possíveis de ϕ, existe um número infinito de pares possíveis de componentes de $\vec{a}$.

Qual é, então, o par de componentes "correto"? A resposta é que são todos igualmente válidos, já que cada par (com seu sistema de eixos) nos dá apenas uma forma diferente de descrever o mesmo vetor $\vec{a}$; todos produzem o mesmo módulo e a mesma orientação para o vetor. Na Fig. 3-19, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \tag{3-18}$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3-19}$$

A verdade é que temos uma grande liberdade para escolher um sistema de coordenadas, já que as relações entre vetores não dependem da localização da origem nem da orientação dos eixos. Isso também se aplica às relações da física; elas são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e a riqueza da linguagem dos vetores, e é fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-10, pode representar três (ou até mais) relações, como as Eqs. 3-11, 3-12 e 3-13.

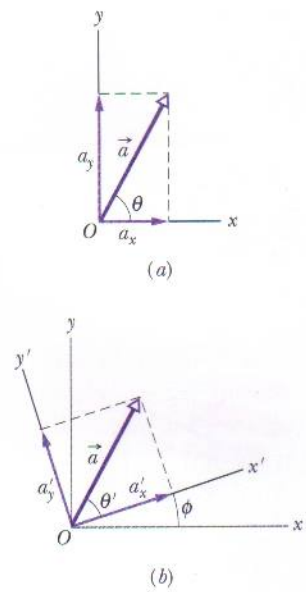


FIG. 3-19 (*a*) O vetor $\vec{a}$ e suas componentes. (*b*) O mesmo vetor, com os eixos do sistema de coordenadas girados de um ângulo ϕ.

3-8 | Multiplicação de Vetores*

Existem três formas de multiplicar vetores, mas nenhuma é exatamente igual à multiplicação algébrica. Ao ler esta seção, tenha em mente que uma calculadora o ajudará a multiplicar vetores apenas se você compreender as regras básicas desse tipo de multiplicação.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo sentido é o mesmo de $\vec{a}$, se s for positivo, e o sentido oposto, se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por $1/s$.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma (conhecida como *produto escalar*) resulta em um escalar; a outra (conhecida como *produto vetorial*) resulta em um vetor. (Os estudantes costumam confundir as duas formas.)

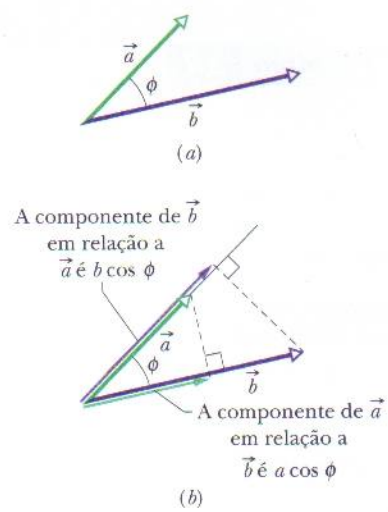


FIG. 3-20 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

O Produto Escalar

O **produto escalar** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-20*a* é escrito como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e definido pela equação

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi, \tag{3-20}$$

onde a é o módulo de $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (ou, mais apropriadamente, entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$). Na realidade, existem dois ângulos possíveis: ϕ e $360° - \phi$. Qualquer dos dois pode ser usado na Eq. 3-20, já que seus co-senos são iguais.

Note que o lado direito da Eq. 3-20 contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos \phi$). Assim, o produto $\vec{a} \cdot \vec{b}$ no lado esquerdo representa uma grandeza *escalar*, e é lido como "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores e (2) a componente escalar do outro em relação ao pri-

*Como os assuntos discutidos nesta seção serão aplicados apenas em capítulos posteriores (Capítulo 7, no caso do produto escalar, e Capítulo 11, no caso do produto vetorial), talvez o professor prefira deixar o estudo desta seção para mais tarde.

meiro vetor. Assim, por exemplo, na Fig. 3-19*b*, $\vec{a}$ tem uma componente escalar $a \cos \phi$ em relação a $\vec{b}$; note que essa componente pode ser determinada traçando uma perpendicular a $\vec{b}$ que passe pela extremidade de $\vec{a}$. Analogamente, $\vec{b}$ possui uma componente escalar $b \cos \phi$ em relação a $\vec{a}$.

Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

Para separar as componentes, a Eq. 3-20 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3-21}$$

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, de modo que podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Quando os dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} + a_z\hat{\text{k}}) \cdot (b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}} + b_z\hat{\text{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a propriedade distributiva: calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{3-23}$$

TESTE 4 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C} \cdot \vec{D}$ é igual (a) a zero, (b) a 12 unidades e (c) a −12 unidades?

Exemplo 3-7

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{\text{i}} - 4{,}0\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\text{i}} + 3{,}0\hat{\text{k}}$? (*Atenção:* Muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas você aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDÉIA-CHAVE O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição de seu produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \tag{3-24}$$

Cálculos: Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3{,}0\hat{\text{i}} - 4{,}0\hat{\text{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\text{i}} + 3{,}0\hat{\text{k}}) \\ &= (3{,}0\hat{\text{i}}) \cdot (-2{,}0\hat{\text{i}}) + (3{,}0\hat{\text{i}}) \cdot (3{,}0\hat{\text{k}}) \\ &\quad + (-4{,}0\hat{\text{j}}) \cdot (-2{,}0\hat{\text{i}}) + (-4{,}0\hat{\text{j}}) \cdot (3{,}0\hat{\text{k}}). \end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\text{i}}$ e $\hat{\text{i}}$) é de 0°, e nos outros ângulos é de 90°. Assim, temos

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) \\ &= -6{,}0. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61) \cos \phi,$$

e portanto $$\phi = \cos^{-1} \frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°.$$

(Resposta)

O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\times\vec{b}$, e resulta em um terceiro vetor, $\vec{c}$, cujo módulo é

$$c = ab \operatorname{sen} \phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o *menor* dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (É preciso usar o menor dos ângulos entre os vetores porque sen ϕ e sen$(360° - \phi)$ têm sinais opostos.) O produto $\vec{a}\times\vec{b}$ é lido como "*a* vetor *b*".

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares um ao outro.

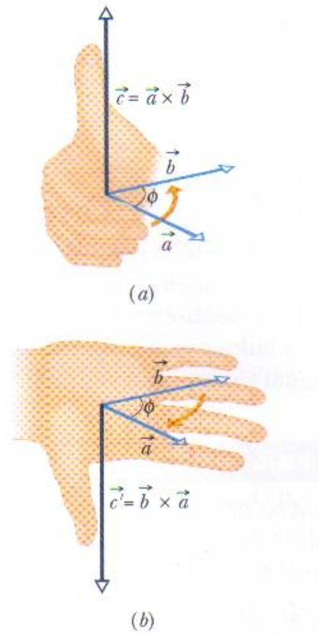


FIG. 3-21 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (*a*) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dados da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. (*b*) O vetor $\vec{b}\times\vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a}\times\vec{b}$.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Fig. 3-21*a* mostra como podemos determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a}$ usando a chamada **regra da mão direita**. Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa linha com a mão *direita* de modo que seus dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido aponta no sentido de $\vec{c}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-21*b*, estamos determinando o sentido de $\vec{c}' = \vec{b}\times\vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. O polegar neste caso aponta no sentido contrário ao da Fig. 3-21*a*, de modo que $\vec{c}' = -\vec{c}$, ou seja,

$$\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b}). \tag{3-28}$$

Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Em termos dos vetores unitários, podemos escrever

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandido de acordo com a propriedade distributiva, ou seja, calculando-se o produto vetorial de cada componente do primeiro vetor por todas as componentes do segundo vetor. Os produtos vetoriais dos vetores unitários aparecem no Apêndice E (veja "Produtos de Vetores"). Assim, por exemplo, na expansão da Eq. 3-29 temos:

$$a_x\hat{\mathrm{i}}\times b_x\hat{\mathrm{i}} = a_xb_x(\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}}) = 0,$$

porque os vetores unitários $\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$ são paralelos e, portanto, seu produto vetorial é zero. Analogamente, temos:

$$a_x\hat{\mathrm{i}}\times b_y\hat{\mathrm{j}} = a_xb_y(\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}) = a_xb_y\hat{\mathrm{k}}.$$

No último passo usamos a Eq. 3-27 para descobrir que o módulo de $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}$ é um. (O módulo dos vetores $\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{j}}$ é um, e o ângulo entre eles é de 90°.) Usando a regra da mão direita, descobrimos que o sentido de $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}$ é o sentido do semi-eixo *z* positivo, ou seja, o sentido de $\hat{\mathrm{k}}$.

Continuando a expandir a Eq. 3-29, é possível mostrar que

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - b_za_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}. \tag{3-30}$$

Também é possível calcular o resultado de um produto vetorial usando um determinante (veja o Apêndice E) ou uma calculadora.

Para verificar se um sistema de coordenadas *xyz* é um sistema dextrogiro, aplique a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}$ no sistema dado. Se seus dedos empurrarem $\hat{\mathrm{i}}$ (semi-eixo *x* positivo) na direção de $\hat{\mathrm{j}}$ (semi-eixo *y* positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semi-eixo *z* positivo, é porque o sistema é dextrogiro.

✓ TESTE 5 Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo 3-8

Na Fig. 3-22, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem módulo igual a 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semi-eixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

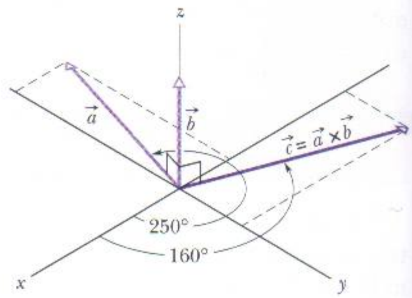


FIG. 3-22 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

IDÉIA-CHAVE Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-21.

Cálculos: O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \operatorname{sen} \phi = (18)(12)(\operatorname{sen} 90°) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-22, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que seus dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; seu polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$, o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \quad \text{(Resposta)}$$

com o semi-eixo x positivo.

Exemplo 3-9

Se $\vec{a} = 3\hat{\mathrm{i}} - 4\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = -2\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{k}}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos: Temos:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (3\hat{\mathrm{i}} - 4\hat{\mathrm{j}}) \times (-2\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{k}}) \\ &= 3\hat{\mathrm{i}} \times (-2\hat{\mathrm{i}}) + 3\hat{\mathrm{i}} \times 3\hat{\mathrm{k}} + (-4\hat{\mathrm{j}}) \times (-2\hat{\mathrm{i}}) \\ &\quad + (-4\hat{\mathrm{j}}) \times 3\hat{\mathrm{k}}.\end{aligned}$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= -6(0) + 9(-\hat{\mathrm{j}}) + 8(-\hat{\mathrm{k}}) - 12\hat{\mathrm{i}} \\ &= -12\hat{\mathrm{i}} - 9\hat{\mathrm{j}} - 8\hat{\mathrm{k}}. \quad \text{(Resposta)}\end{aligned}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

TÁTICAS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tática 5: *Erros Freqüentes no Cálculo de Produtos Vetoriais* Vários erros são freqüentes no cálculo de produtos vetoriais. (1) Deixar de posicionar os vetores com a origem no mesmo ponto em comum quando uma figura mostra a origem de um dos vetores coincidindo com a extremidade do outro; você deve deslocar mentalmente um dos vetores para a posição apropriada sem modificar a direção e o sentido (ou, melhor ainda, refazer o desenho). (2) Usar a mão esquerda ao aplicar a regra da mão direita quando a última está ocupada com uma calculadora ou com um lápis. (3) Não respeitar o sentido do primeiro vetor para o segundo quando a orientação dos vetores exige um movimento complicado da mão para aplicar a regra mão direita. Às vezes isso ocorre quando você tenta realizar mentalmente a manobra em vez de mover realmente a mão. (4) Deixar de usar um sistema de coordenadas dextrogiro. A Fig. 3-14 mostra um desenho em perspectiva de um sistema de coordenadas desse tipo.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como a temperatura, possuem apenas um valor. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*, como o deslocamento, possuem um módulo e uma orientação (5 m para cima, por exemplo), e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a extremidade de um na origem do outro. O vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do segundo é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$ invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \text{ e } a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semi-eixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica seu sentido em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos encontrar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ e } \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3-6}$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}, \tag{3-7}$$

onde $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$ e $a_z\hat{\mathrm{k}}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$, e a_x, a_y e az são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \tag{3-11 a 3-13}$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s é positivo e com a orientação oposta se s é negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi, \tag{3-20}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a}\times\vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-21. Note que $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

PERGUNTAS

1 Como a mascote da Universidade da Flórida é um jacaré, a equipe de golfe da universidade joga em um campo onde existe um lago com jacarés. A Fig. 3-23 mostra uma vista aérea da região em torno de um dos buracos do campo com um sistema de coordenadas xy superposto. As tacadas da equipe devem levar a bola da origem até o buraco, que está nas coordenadas (8 m, 12 m), mas a bola pode sofrer apenas os seguintes deslocamentos, que podem ser usados mais de uma vez:

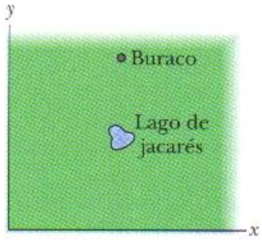


FIG. 3-23 Pergunta 1.

$$\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}, \quad \vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{\mathrm{j}}, \quad \vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{\mathrm{i}}.$$

O lago está nas coordenadas (8 m, 6 m). Se um membro da equipe lança a bola no lago, é imediatamente transferido para a Universidade Estadual da Flórida, a eterna rival. Que seqüência de deslocamentos deve ser usada por um membro do time para evitar o lago?

2 A Eq. 3-2 mostra que a soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?

3 A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

4 Os dois vetores da Fig. 3-24 estão em um plano xy. Determine os sinais das componentes x e y, respectivamente, de (a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$; (c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.

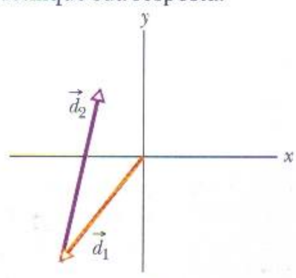


FIG. 3-24 Pergunta 4.

5 Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, é verdade que (a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$; (b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$; (c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

6 Descreva dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Quais dos sistemas de eixos na Fig. 3-25 são sistemas de coordenadas dextrogiros? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semi-eixo positivo.

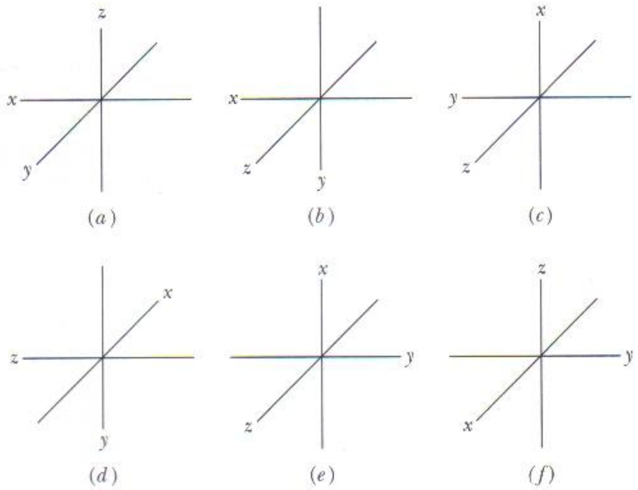


FIG. 3-25 Pergunta 7.

8 A Fig. 3-26 mostra um vetor $\vec{A}$ e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes. (a) Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com $\vec{A}$? (b) Quais têm um produto escalar com $\vec{A}$ negativo?

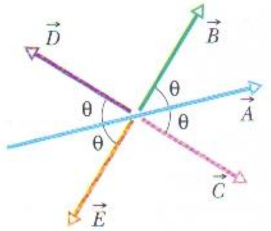


FIG. 3-26 Pergunta 8.

9 Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações da Fig. 3-27 se a constante q é (a) positiva e (b) negativa?

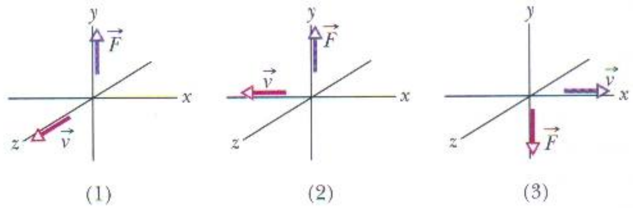


FIG. 3-27 Pergunta 9.

10 Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b}$ é necessariamente igual a $\vec{c}$?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física*, de Jearl Walker, Rio de Janeiro: LTC, 2008.

seção 3-4 Componentes de Vetores

•1 A componente x do vetor $\vec{A}$ é $-25{,}0$ m e a componente y é $+40{,}0$ m. (a) Qual é o módulo de $\vec{A}$? (b) Qual é o ângulo entre a orientação de $\vec{A}$ e o semi-eixo x positivo?

•2 Expresse os seguintes ângulos em radianos: (a) $20{,}0°$; (b) $50{,}0°$; (c) $100°$. Converta os seguintes ângulos para graus: (d) 0,330 rad; (e) 2,10 rad; (f) 7,70 rad.

•3 Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de um vetor $\vec{a}$ do plano xy que faz um ângulo de 250° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo e tem um módulo de 7,3 m?

•4 Na Fig. 3-28, uma máquina pesada é erguida com o auxílio de uma rampa que faz um ângulo $\theta = 20{,}0°$ com a horizontal, na qual a máquina percorre uma distância $d = 12{,}5$ m. (a) De quanto a máquina foi erguida verticalmente? (b) Qual é a distância vertical percorrida pela máxima? (c) Qual é a distância horizontal?

•5 O objetivo de um navio é chegar a um porto situado 120 km ao norte do ponto de partida, mas uma tempestade inesperada o leva para um local situado 100 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância o navio deve percorrer e (b) que rumo deve tomar para chegar ao destino?

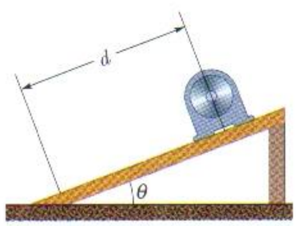


FIG. 3-28 Problema 4.

•6 Um vetor deslocamento $\vec{r}$ no plano xy tem 15 m de comprimento e faz um ângulo $\theta = 30°$ com o semi-eixo x positivo, como mostra a Fig. 3-29. Determine (a) a componente x e (b) a componente y do vetor.

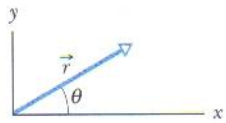


FIG. 3-29 Problema 6.

••7 As dimensões de uma sala são 3,00 m (altura) × 3,70 m × 4,30 m. Uma mosca parte de um canto da sala e vai pousar em um canto diagonalmente oposto. (a) Qual é o módulo do deslocamento da mosca? (b) A distância percorrida pode ser menor que este valor? (c) Pode ser maior? (d) Pode ser igual? (e) Escolha um sistema de coordenadas apropriado e expresse as componentes do vetor deslocamento em termos de vetores unitários. (f) Se a mosca caminhar, em vez de voar, qual o comprimento do caminho mais curto para o outro canto? (*Sugestão:* O problema pode ser resolvido sem fazer cálculos complicados. A sala é como uma caixa; desdobre as paredes para representá-las em um único plano antes de procurar uma solução).

seção 3-6 Soma de Vetores através de Suas Componentes

•8 Um carro viaja 50 km para leste, 30 km para o norte e 25 km em uma direção 30° a leste do norte. Desenhe o diagrama vetorial e determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total do carro em relação ao ponto de partida.

•9 (a) Determine a soma $\vec{a} + \vec{b}$, em termos de vetores unitários, para $\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j}$ e $\vec{b} = (-13{,}0\text{ m})\hat{i} + (7{,}0\text{ m})\hat{j}$. Determine (b) o módulo e (c) o sentido de $\vec{a} + \vec{b}$.

•10 Uma pessoa caminha da seguinte forma: 3,1 km para o norte, 2,4 km para oeste e 5,2 km para o sul. (a) Desenhe o diagrama vetorial que representa este movimento. (b) Que distância e (c) em que direção deve voar um pássaro em linha reta do mesmo ponto de partida ao mesmo ponto de chegada?

•11 Uma pessoa deseja chegar a um ponto que está a 3,40 km de sua localização atual, em uma direção 35,0° ao norte do leste. As ruas por onde pode passar são todas na direção norte-sul ou na direção leste-oeste. Qual é a menor distância que a pessoa precisa percorrer para chegar ao destino?

•12 Para os vetores $\vec{a} = (3{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = (5{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (-2{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$, determine $\vec{a} + \vec{b}$ (a) em termos de vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo (em relação a $\hat{\text{i}}$). Determine $\vec{b} - \vec{a}$ (d) em termos de vetores unitários e em termos (e) do módulo e (f) do ângulo.

•13 Dois vetores são dados por

$$\vec{a} = (4{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} - (3{,}0\text{ m})\hat{\text{j}} + (1{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}$$

e

$$\vec{b} = (-1{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (1{,}0\text{ m})\hat{\text{j}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{k}}.$$

Em termos de vetores unitários, determine (a) $\vec{a} + \vec{b}$, (b) $\vec{a} - \vec{b}$ e (c) um terceiro vetor, $\vec{c}$, tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

•14 Determine as componentes (a) x, (b) y e (c) z da soma $\vec{r}$ dos deslocamentos $\vec{c}$ e $\vec{d}$ cujas componentes em metros ao longo dos três eixos são $c_x = 7{,}4$, $c_y = -3{,}8$, $c_z = -6{,}1$, $d_x = 4{,}4$, $d_y = -2{,}0$, $d_z = 3{,}3$.

•15 Uma formiga, enlouquecida pelo sol em um dia quente, sai correndo em um plano xy. As componentes $(x; y)$ de quatro corridas consecutivas em linha reta são as seguintes, todas em centímetros: (30,0; 40,0), (b_x; −70,0), (−20,0; c_y);(−80,0; −70,0). O deslocamento resultante das quatro corridas tem componentes (−140; −20,0). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•16 Na soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$, o vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e um ângulo de 40,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo, e o vetor $\vec{C}$ tem um módulo de 15,0 m e um ângulo de 20,0° no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x negativo. Determine (a) o módulo de $\vec{B}$ e (b) o ângulo de $\vec{B}$ em relação ao semi-eixo x positivo.

•17 Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ na Fig. 3-30 têm módulos iguais a 10,0 m e os ângulos são $\theta_1 = 30°$ e $\theta_2 = 105°$. Determine as componentes (a) x e (b) y da soma vetorial $\vec{r}$ dos dois vetores, (c) o módulo de $\vec{r}$ e (d) o ângulo que $\vec{r}$ faz com o semi-eixo x positivo.

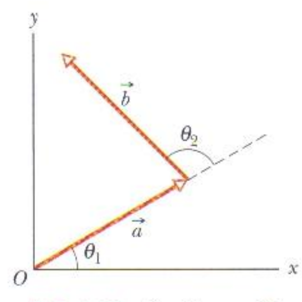


FIG. 3-30 Problema 17.

•18 Você deve executar quatro deslocamentos sucessivos na superfície plana num deserto, começando na origem de um sistema de coordenadas xy e terminando nas coordenadas (−140 m, 30 m). As componentes de seus deslocamentos são, respectivamente, as seguintes, em metros: (20, 60), (b_x, −70), (−20, c_y) e (−60, −70). Determine (a) b_x e (b) c_y. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento total.

•19 Três vetores, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, têm módulos iguais a 50 m e estão em um plano xy. Suas orientações em relação ao sentido semi-eixo x positivo são 30°, 195° e 315°, respectivamente. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do vetor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de um quarto vetor, $\vec{d}$, tal que $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = 0$.

•20 (a) Qual é a soma dos quatro vetores seguintes em termos de vetores unitários? (b) Para esta soma, quais são (b) o módulo, (c) o ângulo em graus e (d) o ângulo em radianos?

$\vec{E}$: 6,00 m a + 0,900 rad	$\vec{F}$: 5,00 m a − 75,0°
$\vec{G}$: 4,00 m a + 1,20 rad	$\vec{H}$: 6,00 m a − 210°

•21 Em um jogo de xadrez ao ar livre, no qual as peças ocupam o centro de quadrados com 1,00 m de lado, um cavalo é movido da seguinte forma: (1) dois quadrados para a frente e um quadrado para a direita; (2) dois quadrados para a esquerda e um quadrado para a frente; (3) dois quadrados para a frente e um quadrado para a esquerda. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao sentido "para a frente") do deslocamento total do cavalo após a série de três movimentos.

••22 Um explorador polar foi surpreendido por uma nevasca, que reduziu a visibilidade a praticamente zero, quando retornava ao acampamento. Para chegar ao acampamento ele deveria caminhar 5,6 km para o norte, mas quando o tempo melhorou percebeu que na realidade havia caminhado 7,8 km em uma direção 50° ao norte do leste. (a) Que distância e (b) em que sentido deve caminhar para voltar à base?

••23 O oásis B está 25 km a leste do oásis A. Partindo do oásis A, um camelo percorre 24 km em uma direção 15° ao sul do leste e 8,0 km para o norte. A que distância o camelo está do oásis B?

••24 Dois besouros correm em um deserto plano, partindo do mesmo ponto. O besouro 1 corre 0,50 m para leste e 0,80 m em uma direção 30° ao norte do leste. O besouro 2 corre 1,6 m em uma direção 40° ao leste do norte e depois corre em outra direção. Quais devem ser (a) o módulo e (b) o sentido da segunda corrida do segundo besouro para que ele termine na mesma posição final que o primeiro besouro?

••25 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{C} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}}$, o resultado é um vetor no sentido do semi-eixo y positivo, com um módulo igual ao de $\vec{C}$. Qual é o módulo de $\vec{B}$?

••26 O vetor $\vec{A}$, paralelo ao eixo x, deve ser somado ao vetor $\vec{B}$, que tem um módulo de 7,0 m. A soma é um vetor paralelo ao eixo y, com um módulo 3 vezes maior que o de $\vec{A}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

••27 Para se orientarem, as formigas de jardim costumam criar uma rede de trilhas marcadas por feromônios. Partindo do formigueiro, cada uma dessas trilhas se bifurca repetidamente em duas trilhas que formam um ângulo de 60°. Quando uma formiga perdida encontra uma trilha, pode saber em que direção fica o formigueiro ao chegar ao primeiro ponto de bifurcação. Se estiver se afastando do formigueiro, encontrará duas trilhas que formam ângulos pequenos com a direção em que estava se movendo, 30° para a esquerda e 30° para a direita. Se estiver se aproximando do formigueiro, encontrará apenas uma trilha com essa característica, 30° para a esquerda ou 30° para a direita. A Fig. 3-31 mostra uma rede de trilhas típica, com segmentos de reta de 2,0 cm de comprimento e bifurcações simétricas de 60°. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao semi-eixo x positivo) do deslocamento até o formigueiro (encontre-o na figura) de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto A. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de uma formiga que entra na rede de trilhas no ponto B.

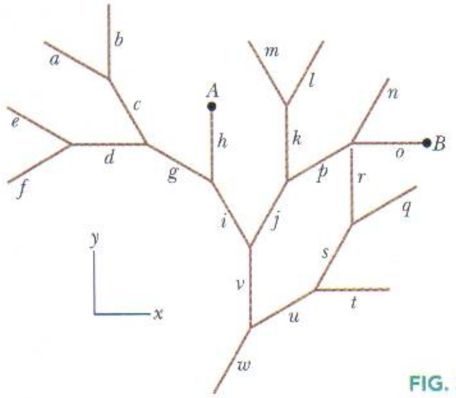


FIG. 3-31 Problema 27.

••28 São dados dois vetores:

$$\vec{a} = (4{,}0\,\text{m})\hat{\text{i}} - (3{,}0\,\text{m})\hat{\text{j}} \text{ e } \vec{b} = (6{,}0\,\text{m})\hat{\text{i}} - (8{,}0\,\text{m})\hat{\text{j}}.$$

Determine (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação a $\hat{\text{i}}$) de $\vec{a}$. Determine (c) o módulo e (d) o ângulo de $\vec{b}$. Determine (e) o módulo e (f) o ângulo de $\vec{a} + \vec{b}$; (g) o módulo e (h) o ângulo de $\vec{b} - \vec{a}$; (i) o módulo e (j) o ângulo de $\vec{a} - \vec{b}$. (k) Determine o ângulo entre as direções de $\vec{b} - \vec{a}$ e $\vec{a} - \vec{b}$.

••29 Se $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$, $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ e $\vec{d}_3 = 2\hat{\text{i}} + 4\hat{\text{j}}$, determine em termos dos vetores unitários, (a) $\vec{d}_1$ e (b) $\vec{d}_2$.

••30 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo.

$\vec{A} = (2{,}00\,\text{m})\hat{\text{i}} + (3{,}00\,\text{m})\hat{\text{j}}$ $\quad$ $\vec{B}$: 4,00 m, a +65,0°

$\vec{C} = (-\,4{,}00\,\text{m})\hat{\text{i}} + (-\,6{,}00\,\text{m})\hat{\text{j}}$ $\quad$ $\vec{D}$: 5,00 m, a −235°

•••31 Na Fig. 3.32, um cubo de aresta a tem um de seus vértices posicionado na origem de um sistema de coordenadas xyz. A *diagonal do cubo* é uma reta que vai de um vértice a outro do cubo, passando pelo centro. Em termos dos vetores unitários, qual é a diagonal do cubo que passa pelo vértice cujas coordenadas são (a) (0, 0, 0), (b) $(a, 0, 0)$ (c) $(0, a, 0)$ e (d) $(a, a, 0)$? (e) Determine os ângulos que as diagonais do cubo fazem com as arestas vizinhas. (f) Determine o comprimento das diagonais do cubo em termos de a.

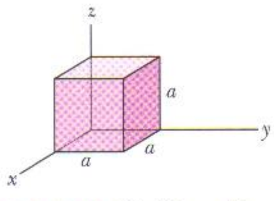


FIG. 3-32 Problema 31.

seção 3-7 Vetores e as Leis da Física

•32 Na Fig. 3-33, um vetor $\vec{a}$ com um módulo de 17,0 m faz um ângulo θ = 56,0° no sentido anti-horário como o semi-eixo x positivo. Quais são as componentes (a) a_x e (b) a_y do vetor? Um segundo sistema de coordenadas está inclinado de um ângulo θ' = 18° em relação ao primeiro. Quais são as componentes (c) a'_x e (d) a'_y neste novo sistema de coordenadas?

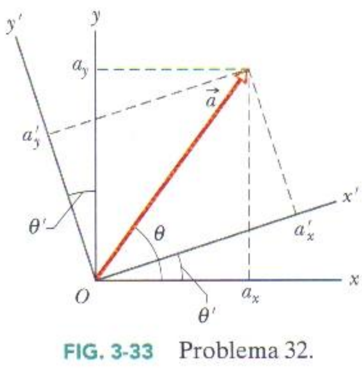


FIG. 3-33 Problema 32.

seção 3-8 Multiplicação de Vetores

•33 Dois vetores, $\vec{r}$ e $\vec{s}$, estão no plano xy. Seus módulos são 4,50 unidades e 7,30 unidades, respectivamente, e eles estão orientados a 320° e 85,0°, respectivamente, no sentido anti-horário em relação ao semi-eixo x positivo. Quais são os valores de (a) $\vec{r}\cdot\vec{s}$ e (b) $\vec{r}\times\vec{s}$?

•34 Se $\vec{d}_1 = 3\hat{\text{i}} - 2\hat{\text{j}} + 4\hat{\text{k}}$ e $\vec{d}_2 = -5\hat{\text{i}} + 2\hat{\text{j}} - \hat{\text{k}}$, determine $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2)\cdot(\vec{d}_1 \times 4\vec{d}_2)$

•35 Três vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 3{,}0\hat{\text{j}} - 2{,}0\hat{\text{k}}$, $\vec{b} = -1{,}0\hat{\text{i}} - 4{,}0\hat{\text{j}} + 2{,}0\hat{\text{k}}$ e $\vec{c} = 2{,}0\hat{\text{i}} + 2{,}0\hat{\text{j}} + 1{,}0\hat{\text{k}}$. Determine (a) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, (b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$ e (c) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

•36 Dois vetores são dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 5{,}0\hat{\text{j}}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}}$. Determine (a) $\vec{a}\times\vec{b}$, (b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, (c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ e (d) a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d) considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

•37 Para os vetores da Fig. 3-34, com a = 4, b = 3 e c = 5, determine (a) o módulo e (b) a orientação de $\vec{a}\times\vec{b}$, (c) o módulo e (d) a orientação de $\vec{a}\times\vec{c}$ e (e) o módulo e (f) orientação de $\vec{b}\times\vec{c}$. (Embora exista, o eixo z não é mostrado na figura.)

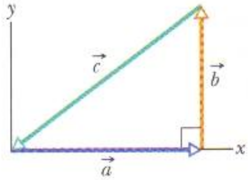


FIG. 3-34 Problemas 37 e 50.

••38 O deslocamento $\vec{d}_1$ está no plano yz, faz um ângulo de 63,0° com o semi-eixo y positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 4,50 m. O deslocamento $\vec{d}_2$ está no plano xz, faz um ângulo de 30,0° com o semi-eixo x positivo, tem uma componente z positiva e um módulo de 1,40 m. Determine (a) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ e (c) o ângulo entre $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$.

••39 Use a definição de produto escalar, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$, e o fato de que $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ para calcular o ângulo entre os dois vetores dados por $\vec{a} = 3{,}0\hat{\text{i}} + 3{,}0\hat{\text{j}} + 3{,}0\hat{\text{k}}$ e $\vec{b} = 2{,}0\hat{\text{i}} + 1{,}0\hat{\text{j}} + 3{,}0\hat{\text{k}}$.

••40 Determine $3\vec{C}\cdot(2\vec{A}\times\vec{B})$ para os três vetores a seguir.

$$\vec{A} = 2{,}00\hat{\text{i}} + 3{,}00\hat{\text{j}} - 4{,}00\hat{\text{k}}$$

$$\vec{B} = -3{,}00\hat{\text{i}} + 4{,}00\hat{\text{j}} + 2{,}00\hat{\text{k}} \qquad \vec{C} = 7{,}00\hat{\text{i}} - 8{,}00\hat{\text{j}}$$

••41 O vetor $\vec{A}$ tem módulo igual a 6,00 unidades, o vetor $\vec{B}$ tem módulo igual a 7,00 unidades e $\vec{A}\cdot\vec{B}$ = 14,0. Qual é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$?

••42 No produto $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, faça q = 2,

$$\vec{v} = 2{,}0\hat{\text{i}} + 4{,}0\hat{\text{j}} + 6{,}0\hat{\text{k}} \text{ e } \vec{F} = 4{,}0\hat{\text{i}} - 20\hat{\text{j}} + 12\hat{\text{k}}.$$

Determine $\vec{B}$, em termos dos vetores unitários, para $B_x = B_y$.

••43 Os três vetores na Fig. 3-35 têm módulos a = 3,00 m, b = 4,00 m e c = 10,0 m; θ = 30,0°. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{a}$; (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{b}$; (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{c}$. Se $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$, quais são os valores de (g) p e (h) q?

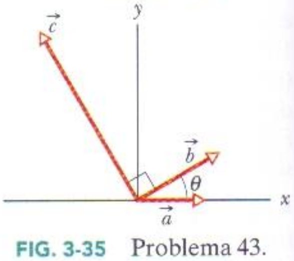


FIG. 3-35 Problema 43.

••44 Em um encontro de mímicos, o mímico 1 se desloca de $\vec{d}_1 = (4{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (5{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$ e o mímico 2 se desloca de $\vec{d}_2 = (-3{,}0\text{ m})\hat{\text{i}} + (4{,}0\text{ m})\hat{\text{j}}$. Determine (a) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$, (b) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$, (c) $(\vec{d}_1+\vec{d}_2)\cdot\vec{d}_2$ e (d) a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. [*Sugestão:* Para resolver o item (d), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20.]

Problemas Adicionais

45 Uma *falha* em uma rocha é uma ruptura ao longo da qual faces opostas da rocha deslizaram uma em relação à outra. Na Fig.

3-36, os pontos A e B coincidiam antes de a rocha em primeiro plano deslizar para a direita. O deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ está no plano da falha. A componente horizontal de $\overrightarrow{AB}$ é o *rejeito horizontal AC*. A componente de $\overrightarrow{AB}$ dirigida para baixo no plano da falha é o *rejeito de mergulho AD*. (a) Qual é o módulo do deslocamento total $\overrightarrow{AB}$ se o rejeito horizontal é 22,0 m e o rejeito de mergulho é 17,0 m? (b) Se o plano da falha faz um ângulo ϕ = 52,0° com a horizontal, qual é a componente vertical de $\overrightarrow{AB}$?

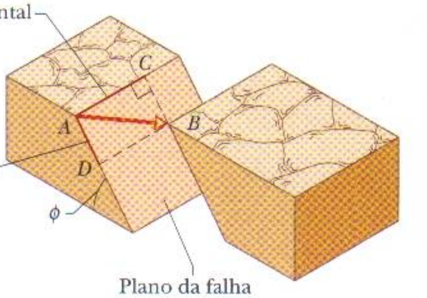


FIG. 3-36 Problema 45.

46 Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm componentes, em metros, a_x = 3,2, a_y = 1,6, b_x = 0,50 e b_y = 4,5. (a) Determine o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Existem dois vetores no plano xy que são perpendiculares a $\vec{a}$ e têm um módulo de 5,0 m. Um deles, o vetor $\vec{c}$, tem uma componente x positiva; o outro, o vetor $\vec{d}$, tem uma componente x negativa. Determine (b) a componente x e (c) a componente y de $\vec{c}$; (d) a componente x e (e) a componente y de $\vec{d}$.

47 Um vetor $\vec{a}$ de módulo 10 unidades e outro vetor $\vec{b}$ de módulo 6,0 unidades fazem um ângulo de 60°. Determine (a) o produto escalar dos dois vetores e (b) o módulo do produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

48 O vetor $\vec{a}$ tem módulo 5,0 m e aponta para leste. O vetor $\vec{b}$ tem módulo 4,0 m e aponta na direção 35° a oeste do norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $\vec{a} + \vec{b}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $\vec{b} - \vec{a}$. (e) Desenhe os diagramas vetoriais correspondentes às duas combinações de vetores.

49 Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos em um plano: $\vec{d}_1$, 4,00 m para sudoeste, $\vec{d}_2$, 5,00 m para leste e $\vec{d}_3$, 6,00 m em uma direção 60,0° ao norte do leste. Use um sistema de coordenadas com o eixo y apontando para o norte e o eixo x apontando para o leste. Determine (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$. Determine (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$. Determine (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$. Considere o deslocamento *total* da partícula após os três deslocamentos. Determine (g) a componente x, (h) a componente y, (i) o módulo e (j) a orientação do deslocamento total. Para que a partícula volte ao ponto de partida (k), que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se deslocar?

50 Para os vetores da Fig. 3.34, com $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$, calcule (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (b) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ e (c) $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

51 Um barco a vela parte do lado americano do lago Erie para um ponto no lado canadense, 90,0 km ao norte. O navegante, contudo, termina 50,0 km a leste do ponto de partida. (a) Que distância e (b) em que sentido deve navegar para chegar ao ponto desejado?

52 Determine a soma dos quatro vetores a seguir (a) em termos dos vetores unitários e em termos (b) do módulo e (c) do ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

$\vec{P}$: 10,0 m, 25,0°, sentido anti-horário em relação a $+x$

$\vec{Q}$: 12,0 m, 10,0°, sentido anti-horário em relação a $+y$

$\vec{R}$: 8,00 m, 20,0°, sentido horário em relação a $-y$

$\vec{S}$: 9,00 m, 40,0°, sentido anti-horário em relação a $-y$

53 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{B}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. Determine os ângulos entre o semi-eixo y negativo e (a) o vetor $\vec{A}$, (b) o vetor $\vec{A} \times \vec{B}$ e (c) o vetor $\vec{A} \times (\vec{B} + 3{,}00\hat{k})$.

54 São dados três deslocamentos em metros: $\vec{d}_1 = 4{,}0\hat{i} + 5{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{d}_2 = -1{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{d}_3 = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (a) Determine $\vec{r} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2 + \vec{d}_3$. (b) Determine o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{d}_1$ em relação a $\vec{d}_2$. (d) Qual é a componente de $\vec{d}_1$ que é perpendicular a $\vec{d}_2$ e está no plano de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? (*Sugestão:* Para resolver o item (c), considere a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), considere a Eq. 3-27.)

55 Os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estão no plano xy. $\vec{A}$ tem módulo 8,00 e ângulo 130°; $\vec{B}$ tem componentes $B_x = -7{,}72$ e $B_y = -9{,}20$. (a) Determine $5\vec{A} \cdot \vec{B}$. Determine $4\vec{A} \times 3\vec{B}$ (b) em termos dos vetores unitários e (c) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas (veja a Fig. 3-37). (d) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $4\vec{A} \times 3\vec{B}$. (*Sugestão:* Pense um pouco antes de iniciar os cálculos.) Determine $\vec{A} + 3{,}00\hat{k}$ (e) em termos dos vetores unitários e (f) através do módulo e do ângulo em coordenadas esféricas.

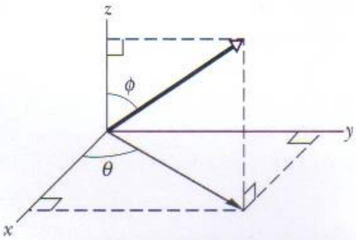


FIG. 3-37 Problema 55.

56 O vetor $\vec{d}_1$ está no sentido negativo do eixo y e o vetor $\vec{d}_2$ está no sentido positivo do eixo x. Determine a orientação (a) de $\vec{d}_2/4$ e (b) de $\vec{d}_1/(-4)$. Determine o módulo (c) de $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$ e (d) de $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2/4)$. Determine a orientação do vetor (e) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (f) do vetor $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine o módulo (g) de $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ e (h) de $\vec{d}_2 \times \vec{d}_1$. Determine (i) o módulo e (j) a orientação de $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2/4)$.

57 São dados três vetores em metros:

$$\vec{d}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{d}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}.$$

Determine (a) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$, (b) $\vec{d}_1 \cdot (\vec{d}_2 \times \vec{d}_3)$ e (c) $\vec{d}_1 \times (\vec{d}_2 + \vec{d}_3)$.

58 Um jogador de golfe precisa de três tacadas para colocar a bola no buraco. A primeira tacada lança a bola 3,66 m para o norte, a segunda 1,83 m para o sudeste e a terceira 0,91 m para o sudoeste. Determine (a) o módulo e (b) a direção do deslocamento necessário para colocar a bola no buraco na primeira tacada.

59 Considere um vetor $\vec{a}$ no sentido positivo do eixo x, um vetor $\vec{b}$ no sentido positivo do eixo y e um escalar d. Qual é a orientação de $\vec{b}/d$ se d é (a) positivo e (b) negativo? Qual é o módulo de (c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e (d) $\vec{a} \cdot \vec{b}/d$? Qual é orientação (e) de $\vec{a} \times \vec{b}$ e (f) $\vec{b} \times \vec{a}$? (g) Qual é o módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$? (h) Qual é o módulo de $\vec{b} \times \vec{a}$? Qual é (i) a amplitude e (j) a orientação de $\vec{a} \times \vec{b}/d$ se d é positivo?

60 Um vetor $\vec{d}$ tem módulo 2,5 m e aponta para o norte. Determine (a) o módulo e (b) a orientação de $4{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação de $-3{,}0\vec{d}$.

61 Suponha que $\hat{i}$ aponta para leste, $\hat{j}$ aponta para o norte e $\hat{k}$ aponta para cima. Determine os valores de (a) $\hat{i}\cdot\hat{k}$, (b) $(-\hat{k})\cdot(-\hat{j})$ e (c) $\hat{j}\cdot(-\hat{j})$. Determine as orientações (como, por exemplo, para leste ou para baixo) dos produtos vetoriais (d) $\hat{k}\times\hat{j}$, (e) $(-\hat{i})\times(-\hat{j})$ e (f) $(-\hat{k})\times(-\hat{j})$.

62 Considere dois deslocamentos, um de módulo 3 m e outro de módulo 4 m. Mostre que os vetores deslocamento podem ser combinados para produzir um deslocamento de módulo (a) 7m, (b) 1 m e (c) 5m.

63 Um banco no centro de Boston é assaltado (veja o mapa da Fig. 3-38). Os ladrões fogem de helicóptero, realizando três deslocamentos sucessivos: 32 km, 45° ao sul do leste; 53 km, 26° ao norte do oeste; 26 km, 18° a leste do sul. No final do terceiro vôo, são capturados. Em que cidade os ladrões foram presos?

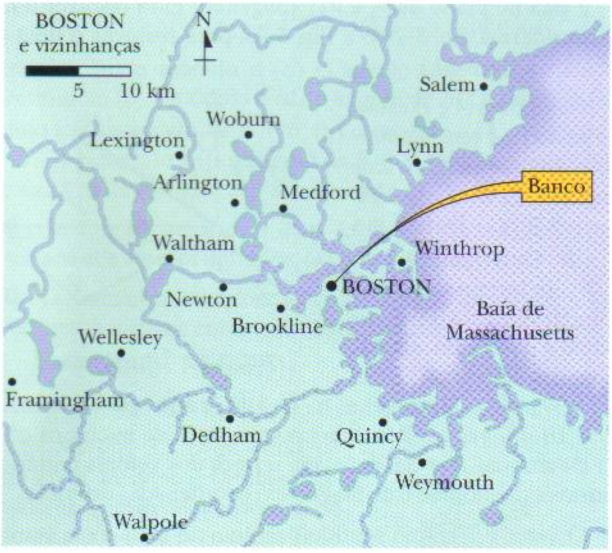


FIG. 3-38 Problema 63.

64 Uma roda com 45,0 cm de raio rola sem escorregar em um piso horizontal (Fig. 3-39). No instante t_1, o ponto P, pintado na borda da roda, está no ponto de contato entre a roda e o piso. Em um instante posterior t_2, a roda descreveu meia revolução. Quais são (a) o módulo e (b) o ângulo (em relação ao piso) do deslocamento do ponto P?

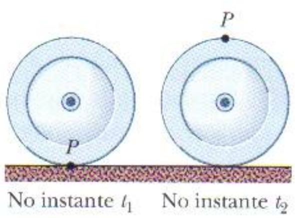


FIG. 3-39 Problema 64.

65 O vetor $\vec{A}$ tem um módulo de 12,0 m e faz um ângulo de 60,0° no sentido anti-horário com o semi-eixo x positivo de um sistema de coordenadas xy. O vetor $\vec{B}$ é dado por $(12{,}0\text{ m})\hat{i} + (8{,}00\text{ m})\hat{j}$ no mesmo sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas sofre uma rotação de 20,0° no sentido anti-horário em torno da origem para formar um sistema $x'y'$. Determine os vetores (a) $\vec{A}$ e (b) $\vec{B}$ em termos dos vetores unitários do novo sistema.

66 Uma mulher caminha 250 m na direção 30° a leste do norte e 175 m na direção leste. Determine (a) o módulo e (b) o ângulo do deslocamento total. (c) Determine a distância percorrida pela mulher. (d) Qual é maior, a distância percorrida ou o módulo do deslocamento?

67 (a) Determine, em termos dos vetores unitários, $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ para $\vec{a} = 5{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j} - 6{,}0\hat{k}$, $\vec{b} = -2{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k}$ e $\vec{c} = 4{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$. (b) Calcule o ângulo entre $\vec{r}$ e o semi-eixo z positivo. (c) Determine a componente de $\vec{a}$ em relação a $\vec{b}$. (d) Determine a componente de $\vec{a}$ em uma direção perpendicular a $\vec{b}$, no plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (*Sugestão:* para resolver o item (c), veja a Eq. 3-20 e a Fig. 3-20; para resolver o item (d), veja a Eq. 3-27.)

68 Se $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} = 4\vec{c}$ e $\vec{c} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, determine (a) $\vec{a}$ e (b) $\vec{b}$.

69 Um manifestante, com sua placa de protesto, parte da origem de um sistema de coordenadas xyz, com o plano xy na horizontal. Ele se desloca 40 m no sentido negativo do eixo x, faz uma curva de noventa graus à esquerda, caminha mais 20 m e sobe até o alto de uma torre com 25 m de altura. (a) Em termos de vetores unitários, qual é o deslocamento da placa do início ao fim? (b) O manifestante deixa cair a placa, que vai parar na base da torre. Qual é o módulo do deslocamento total, do início até este novo fim?

70 Um vetor $\vec{d}$ tem um módulo de 3,0 m e aponta para o sul. Determine (a) o módulo e (b) a orientação do vetor $5{,}0\vec{d}$. Determine (c) o módulo e (d) a orientação do vetor $-2{,}0\vec{d}$.

71 Se $\vec{B}$ é somado a $\vec{A}$, o resultado é $6{,}0\hat{i} + 1{,}0\hat{j}$. Se $\vec{B}$ é subtraído de $\vec{A}$, o resultado é $-4{,}0\hat{i} + 7{,}0\hat{j}$. Qual é o módulo de $\vec{A}$?

72 Uma formiga-de-fogo, em busca de molho picante em uma área de piquenique, executa três deslocamentos sucessivos no nível do solo: $\vec{d}_1$, de 0,40 m para sudoeste (ou seja, 45° entre sul e oeste), $\vec{d}_2$, de 0,50 m para leste, e $\vec{d}_3$, de 0,60 m em uma direção 60° ao norte do leste. Suponha que o sentido positivo do eixo x aponte para leste e o sentido positivo do eixo y para o norte. Quais são (a) a componente x e (b) a componente y de $\vec{d}_1$? Quais são (c) a componente x e (d) a componente y de $\vec{d}_2$? Quais são (e) a componente x e (f) a componente y de $\vec{d}_3$?

Quais são (g) a componente x e (h) a componente y, (i) o módulo e (j) o sentido do deslocamento total da formiga? Para a formiga voltar diretamente ao ponto de partida, (k) que distância deve percorrer e (l) em que direção deve se mover?