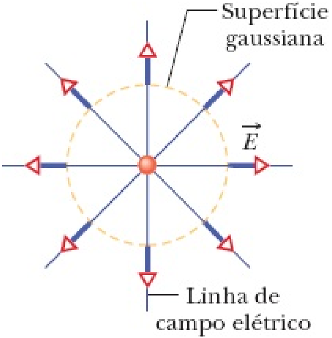
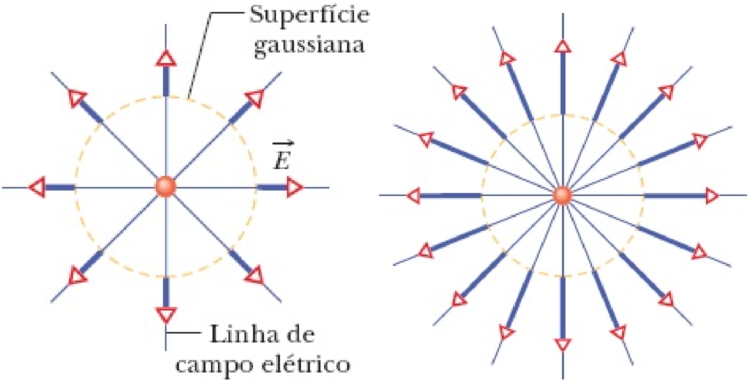
Lei de Gauss - Capítulo 23

- Considere uma carga elétrica Q, e imagine uma esfera $\mathcal{S}$ de raio r ao redor desta carga.
- O campo elétrico gerado pela carga, na esfera $\mathcal{S}$ tem módulo constante: $E = kQ/r^2$.



- Considere a mesma situação com uma carga $2Q$ ao invés. . . .

Lei de Gauss

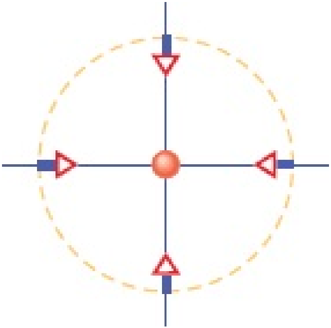


- Mais carga, mais linhas por áreas transversal ao campo.

A superfície $\mathcal{S}$ é chamada de superfície Gaussiana.

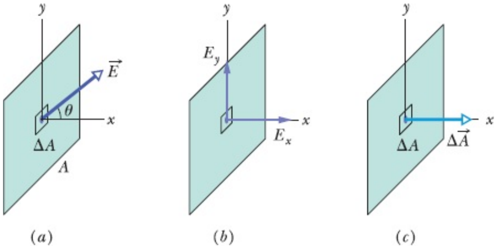
Lei de Gauss

- A Lei de Gauss relaciona o campo elétrico em uma superfície que envolve cargas.
- Qual é o sinal desta carga?



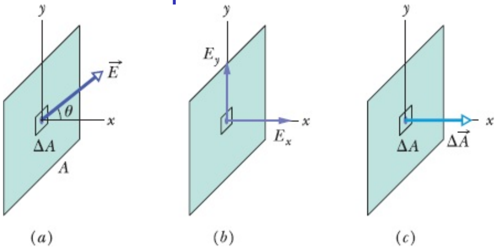
Flúxo do Campo Elétrico

- Em geral, o **fluxo** de uma grandeza é a quantidade desta grandeza que atravessa uma superfície de área A.
- Aqui, a nossa grandeza é o Campo Elétrico $\vec{E}$, vetorial.
- $\vec{E}$ pode ser dividido em:
  - Componente transversal E_x e componente tangencial E_y.



- Note que apenas a componente transversal E_x efetivamente atravessa a área A.
- Fazendo θ o ângulo entre a *direção normal* e o campo E, temos:

Flúxo do Campo Elétrico



$$\Phi = E\cos\theta A = \vec{E}\cdot\vec{n}A = \vec{E}\cdot\vec{A},$$

$\vec{n}$ é o vetor unitário normal a superfície A ($\vec{A} = \vec{n}A$).
Para uma área pequena ΔA ou infinitesimal dA, temos que:

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{A}.$$

Assim, o flúxo total é

$$\Phi = \int_A \vec{E}\cdot d\vec{A}.$$

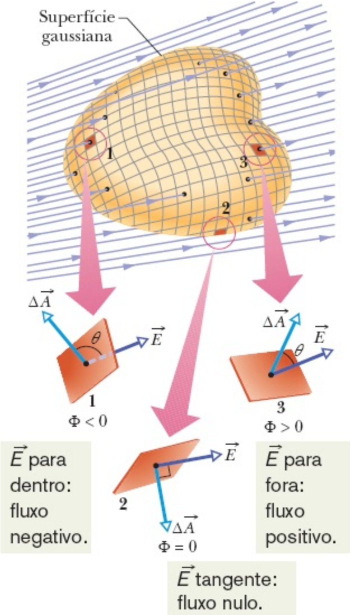
Detalhes:

1. Produto escalar entre a área e o vetor campo.
   - Encontre a direção e sentido da área, ex, $d\vec{A} = dA\hat{\imath}$.
   - Expresse o vetor $\vec{E}$ em componentes, ex, $\vec{E} = 4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}\text{N/C}$.
   - Calcule o produto escalar:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = 4dA \underbrace{\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}}_{=1} + 4dA \underbrace{\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}}_{=0} = 4dA.$$

2. Superfície Fechada:
   - A superfície de integração precisa **conter** a carga Q dentro dela. Logo precisa ser **fechada**. Pode-se definir *dentro* e *fora* da superfície.

Sinal do Fluxo

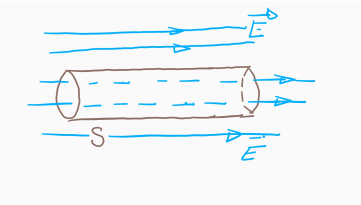


3. Sinal do Fluxo:
   - O vetor $d\vec{A}$ vai sempre apontar **para FORA**.
   - Se o campo sai, o fluxo vai ser positivo.
   - Se o campo entra, o fluxo vai ser negativo.
4. Fluxo total:
   - É a integral sobre a superfície fechada $\mathcal{S}$:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Exemplo 1

Considere um campo $\vec{E}$ uniforme e uma superfície gaussiana Cilíndrica $\mathcal{S}$ como abaixo:

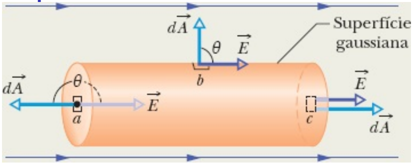


1. Dividimos o cilindro em três partes:
   - A base da esquerda (a)
   - A superfície lateral cilíndrica (b)
   - A base da direita (c)
2. O Fluxo total é a soma dos três fluxos parciais

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c.$$

3. As bases são **ortogonais** ao campo, logo $\theta = 180$ ou 0 depedendo.
4. Na lateral o campo elétrico é tangencial à superfície, logo $\theta = 90$.

Exemplo 1



Lado (a)

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cos 180 dA = -E \int dA = -EA,$$

Lado (c)

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cos 0 dA = E \int dA = EA,$$

Lateral (b)

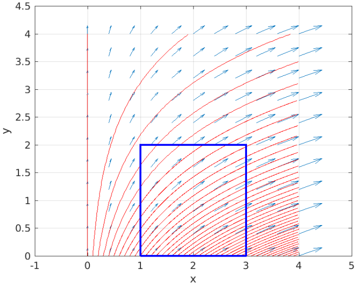
$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E \cos 90 dA = 0.$$

Logo o Fluxo total é ZERO.

Exemplo 2 - Fluxo de campo não uniforme

- Considere um cubo de lado 2, sentado no plano x-y, e o campo dado por:

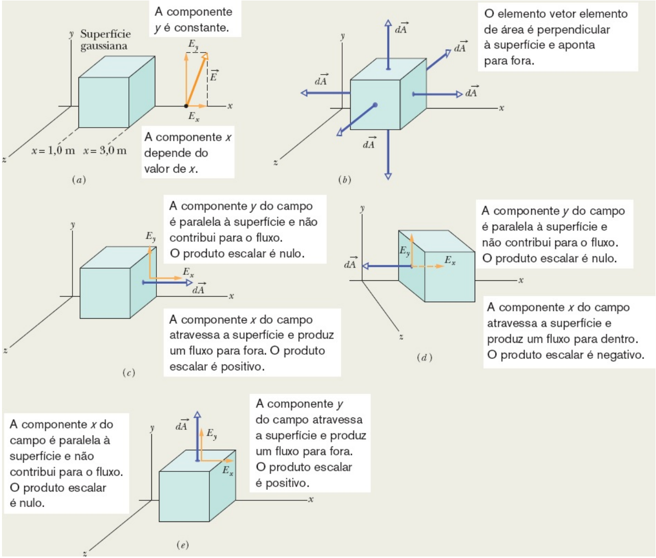
$$\vec{E} = 3x\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}.$$



Note:

- O campo **não tem** componente Z, o campo não atravessa a base nem o topo.
- O campo **é constante** em Y, simplifica.
- Apenas em X o campo realmente varia.

Exemplo 2 - Fluxo de campo não uniforme



Exemplo 2 - Fluxo de campo não uniforme

- Cada face tem area $A = 4$.
- Nas base z=0 e z=2, não há fluxo
- Nas laterais, y=0 e y=2, o fluxo é contantes:
  - Estas faces tem direção normal $-\hat{\jmath}$ $(y = 0)$ e $+\hat{\jmath}$ $(y = 2)$. Logo:

$$\Phi_y = AE_y - AE_y = 4 * 4 - 4 * 4 = 16 - 16 = 0.$$

- Nas laterais, $x = 0$ e $x = 2$ é onde temos algo diferente:
  - Estas faces tem direção normal $-\hat{\imath}$ $(x = 1)$ e $+\hat{\imath}$ $(x = 3)$.
  - A componente $E_x = 3x$, logo:

$$\Phi_x = (4xi + 4j) \cdot (-\hat{\imath})|_{x=1} A + (4xi + 4j) \cdot (+\hat{\imath})|_{x=3} A =$$

$$= -4 * 1 * A + 4 * 3 * A = -12 + 36 = 24.$$

- Fluxo total é 24.

A Lei de Gauss

- Considere uma superfície imaginária (chamada de superfície gaussian) $\mathcal{S}$.
  - Fechada (envolve um certo volume), sem furos.
- Considere cargas q_{env} envolvidas no interior de $\mathcal{S}$.
- Considere um Campo Elétrico $\vec{E}$ na região.

O fluxo Φ do Campo Elétrico $\vec{E}$ através da superfície $\mathcal{S}$, é dado por

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\epsilon_0},$$

onde

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Demonstração da Lei de Gauss

É simples de se ver que esta lei deriva da lei de Coulomb.

1. O campo elétrico de uma carga puntual q é radial
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}.$$

2. O fluxo em uma superfície esférica com q no centro é:

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\overbrace{d\vec{A}}^{\hat{r}dA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oiint \frac{1}{r^2}r^2\underbrace{\hat{r}\cdot\hat{r}}_{=1}\overbrace{\cos(\theta)d\theta d\phi}^{dA/r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oiint\underbrace{\cos(\theta)d\theta d\phi}_{4\pi}$$
$$= \frac{q}{\epsilon_0}.$$

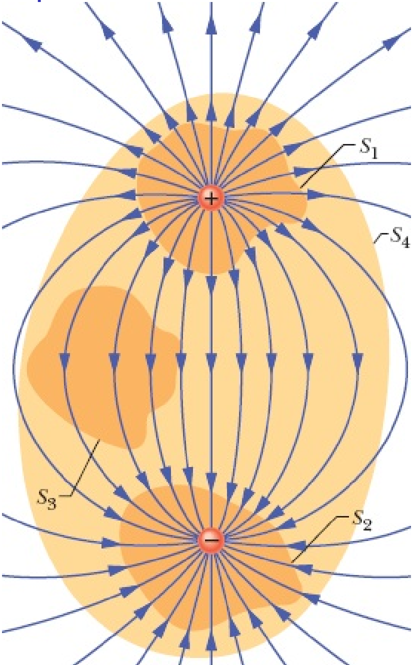
3. Para um pedaço pequeno de uma superfície radial, teríamos
$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\cos(\theta)d\theta d\phi).$$
Esta expressão não depende da distância R da superficie.

Demonstração da Lei de Gauss

4. O Fluxo de $\vec{E}$ em uma superfície qualquer que envolva a carga q vai apenas considerar a fração da área que é **normal** ao campo $\vec{E}$, radial.
5. Como a superfície normal à direção radial é esférica, cada pedaço da superfície qualquer vai contribuir apenas com uma calota esférica infinitesimal.
6. E cada contribuição vai depender apenas do espaço angular, e não da distância! Logo o fluxo vai ser o mesmo valor do que para uma esfera:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Exemplo



$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

$$\Phi_{\mathcal{S}_1} = ?,$$

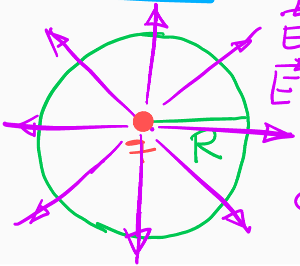
$$\Phi_{\mathcal{S}_2} = ?,$$

$$\Phi_{\mathcal{S}_3} = ?,$$

$$\Phi_{\mathcal{S}_4} = ?,$$

Simetrias (notas de aula)

SIMETRIAS



$\vec{E}$

$\vec{E} = E_r \hat{r}$

const

$$\epsilon_0 \Phi = \epsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E_r \int \hat{r}\cdot\hat{r}\, dA =$$

$$\epsilon_0 E_r A = \epsilon_0 E_r 4\pi r^2 = q$$

$$\boxed{E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

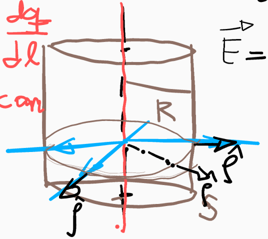
Simetrias (notas de aula)

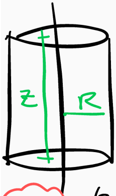
Simetria: CILINDRICA

$\lambda = \frac{dq}{d\ell}$

$\lambda = \text{con}$

$\vec{E} = E_\rho \hat{\rho}$





$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{lado}} \vec{E}\cdot d\vec{A} =$$

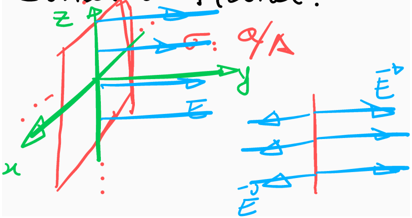
$$= E_\rho \int dA =$$

$$= E_\rho\, 2\pi R z = q/\epsilon_0$$

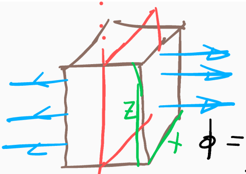
$$E_\rho = (q/z)\Big/ 2\pi\epsilon_0 R = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Simetrias (notas de aula)

Simetria Plana.



$$\vec{E} = E_y \hat{y}$$



$$\phi = \oint E \cdot dA =$$

$$= E_y A + E_y A = Q/\epsilon_0$$

$$2E_y = (Q/A)/\epsilon_0$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Simetrias (notas de aula)

esfera:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cilindro

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Plano

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Problemas do Livro

- 1, 2, 3, 4