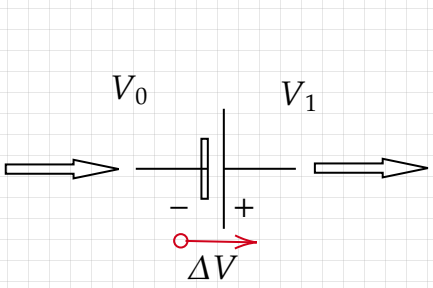
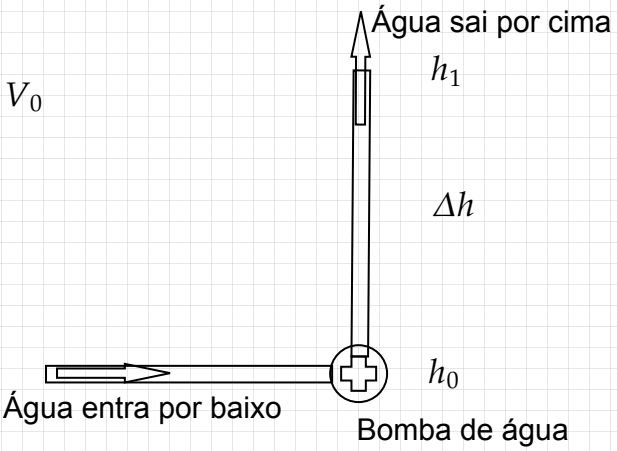
1. Fonte de tensão (bateria)



$V_1 > V_0$



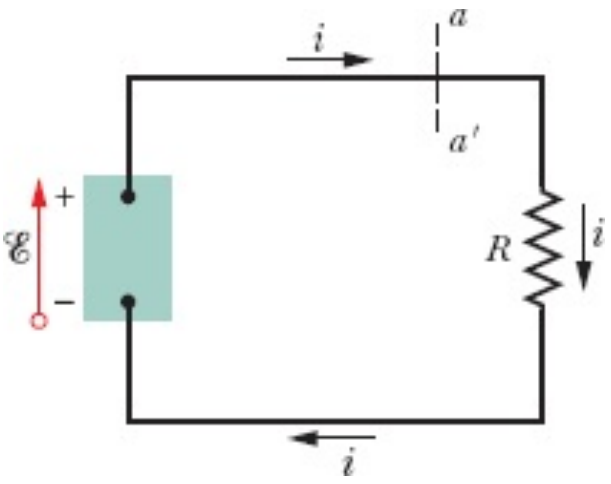
As cargas q num potencial menor são elevadas à um potencial maior: TEM QUE EXECUTAR TRABALHO!

$W = q\Delta V$

- O potencial de elevação da carga é chamado de "Força Eletromotriz" da fonte, e é definido como:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{dW}{dq}.$$

- A fonta ideal não tem resistência elétrica.



Mudança de Potencial no resistor é: $V = Ri$, a "queda" de potencial.
Aqui,

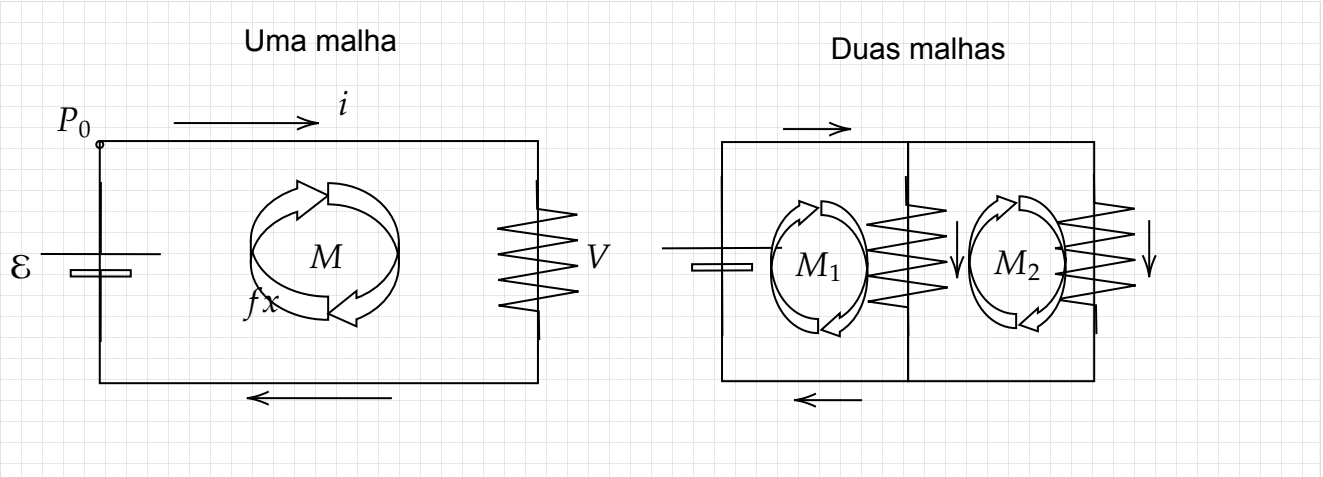
$$V = \mathcal{E},$$

e assim $V = Ri = \mathcal{E} \rightarrow i = \mathcal{E}/R$.

Se $V = 12$volts, $R = 1k\Omega$, quanto é a corrente? $i = 12/1000 = 0.012A = 12mA$ (miliampere).

2. Circuitos de uma malha.

Uma "malha" é qualquer caminho fechado num circuito. Por exemplo:



Como calcular a corrente em uma Malha?

Basta andar pela Malha e ir somando as mudanças de potencial elétrico.
No final, o total tem que ser zero!

$$V_1 + V_2 + \ldots V_n \; = \; 0,$$

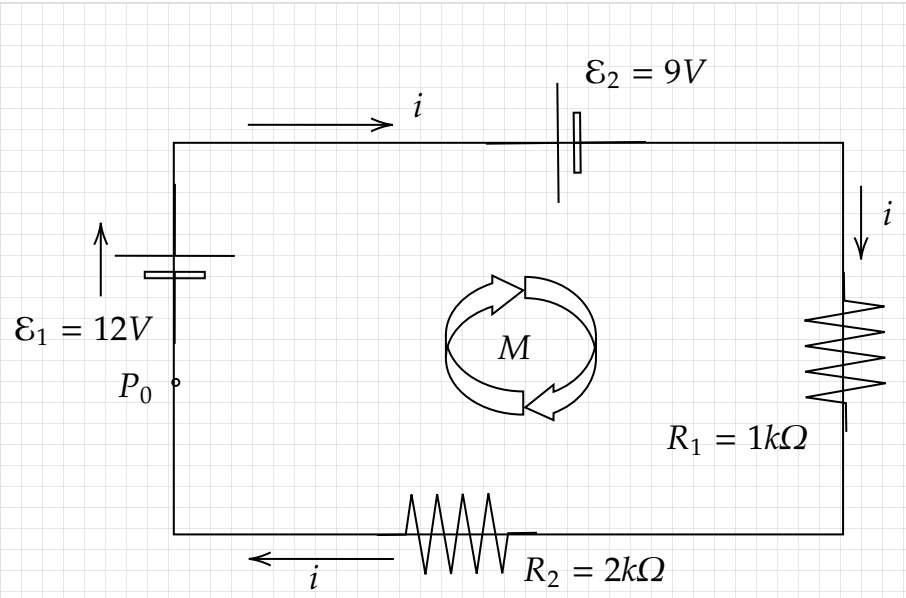
ou no exemplo:

$$\mathcal{E} - V = 0 \rightarrow \; \mathcal{E} = V$$

REGRA DAS MALHAS (Segunda Lei de Kirchhoff): A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao longo de uma malha completa de um circuito é zero.

Para o circuito simples acima, $V = Ri$, então

$$\mathcal{E} = Ri \rightarrow \; i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$



$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - V_1 - V_2 = 0$$

$$+12 - 9 - R_1 i - R_2 i = 0$$

$$(-R_1 - R_2)i + 3 = 0$$

$$(R_1 + R_2)i = 3$$

$$i = \frac{3}{R_1 + R_2} = \frac{3}{3000} = 1mA$$

Método - Em cada malha:

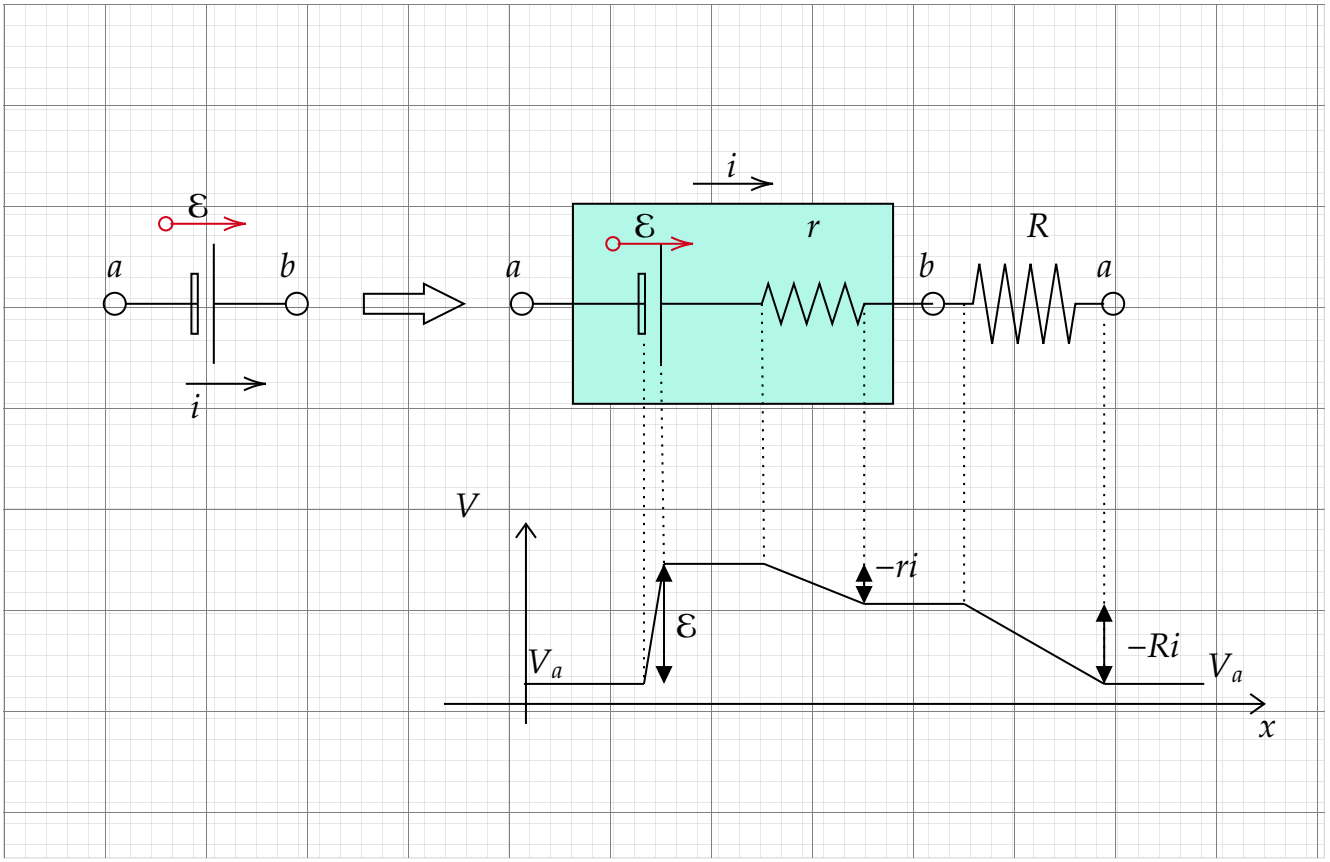
1. Escolher o sentido da corrente i,
2. Escolher o sentido que voce vai andar pela malha, a partir de um ponto P_0

3. Realiza a soma algébrica das mudanças de potenciais de cada parte do circuito (cujo total será zero).
    (a) Quanto atravessamos um componente no sentido da corrente ("a favor da corrente"), a variação de potencial terá o sinal padrão (componentes causam **queda** de potencial, e fontes **elevação** de potencial):
        i. Resistores $\Delta V = -Ri$
        ii. Capacitores $\Delta V = -\frac{q}{C}$
        iii. Fontes (baterias) $\Delta V = +\mathcal{E}$
    (b) Se formos no sentindo inverso da corrente ("contra a corrente"), a variação de potencial terá o sinal oposto (componentes causam **aumento** de potencial, e fontes **queda** de potencial):
        i. Resistores $\Delta V = +Ri$
        ii. Capacitores $\Delta V = +\frac{q}{C}$
        iii. Fontes (baterias) $\Delta V = -\mathcal{E}$
4. A equação final será uma equação para a corrente i.

Exercícios:
1,2,3,5,6

2.1. Resistência Interna em uma fonte

A "fonte" de tensão é um componente **ideal**, ou seja, ele simplesmente eleva o potencial elétrico das cargas.
No entanto uma fonte **real** apresenta outras características, a mais importante é a **resistência interna**:



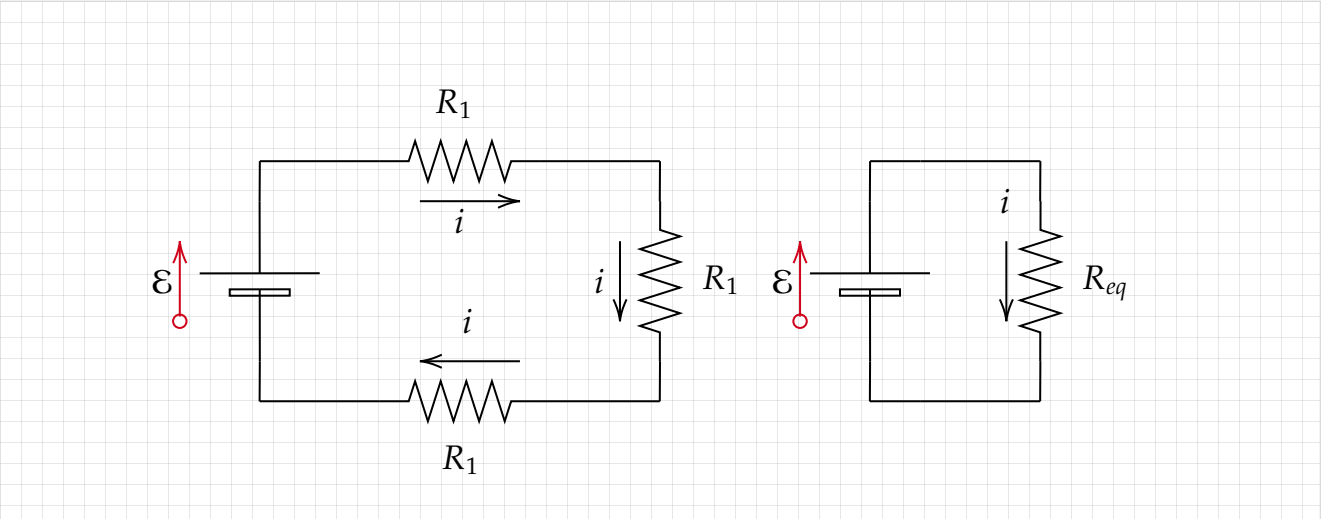
Assim um circuito com uma única bateria **real** e um único resistor, tem que levar em conta a

resistência interna da bateria:

$$\mathcal{E} - ir - iR = 0,$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

2.2. Resistências em Série



Calculando a lei das malhas:

$$+\mathcal{E} - R_1 i - R_2 i - R_3 i = 0,$$

$$\mathcal{E} = i(R_1 + R_2 + R_3) \; = \; i\, R_{eq},$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3.$$

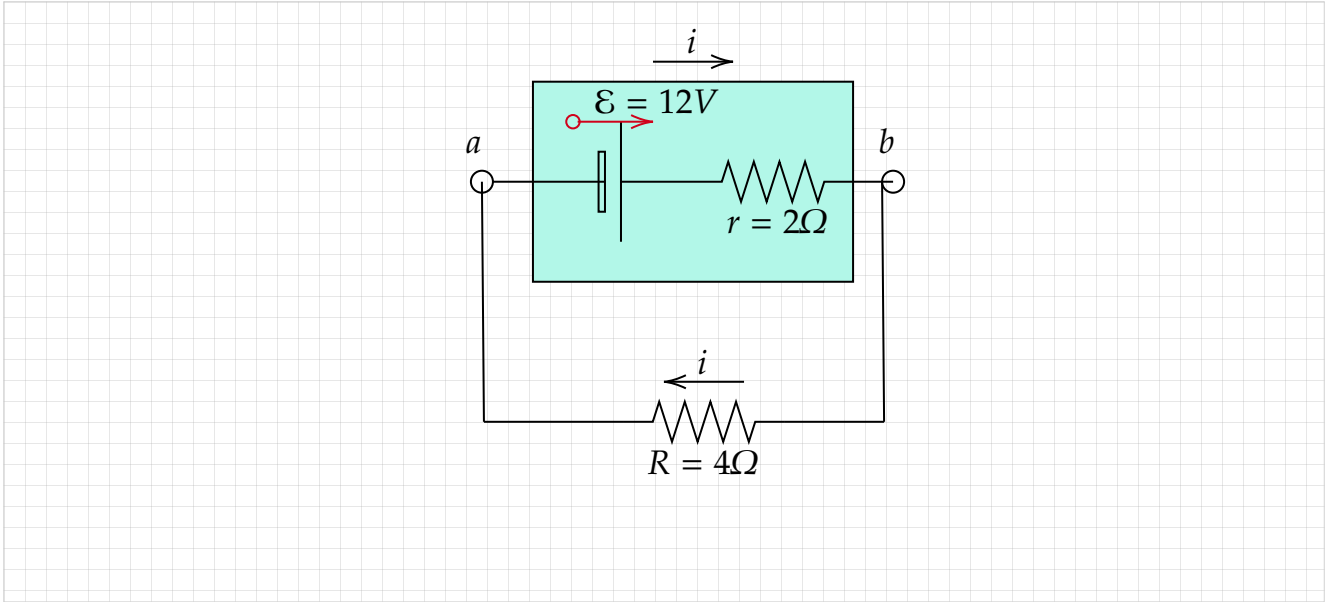
Resistências em série, com a mesma corrente passando por elas: **Soma-se as resistências.**

$$R_{eq} = \sum R_i.$$

Logo, no exemplo:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}.$$

A resistência interna **reduz** a diferença de potencial entre os terminais de uma bateria real:



Vamos calcular a diferença de potencial entre os pontos a e b, esta será dada por:

$$V_a + 12 - ri = V_b \rightarrow \Delta V_{ab} = 12 - ri,$$

que é menor que os 12V indicados para qualquer valor não nulo de i.
Para saber o valor, precisamos da corrente:

$$12 - ri - Ri = 0,$$
$$12 = (r + R)i$$
$$i = \frac{12}{r + R} = \frac{12}{6} = 2A.$$

Com essa corrente, vamos calcular ΔV_{ab},

$$\Delta V_{ab} = 12 - ri = 12 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8V$$

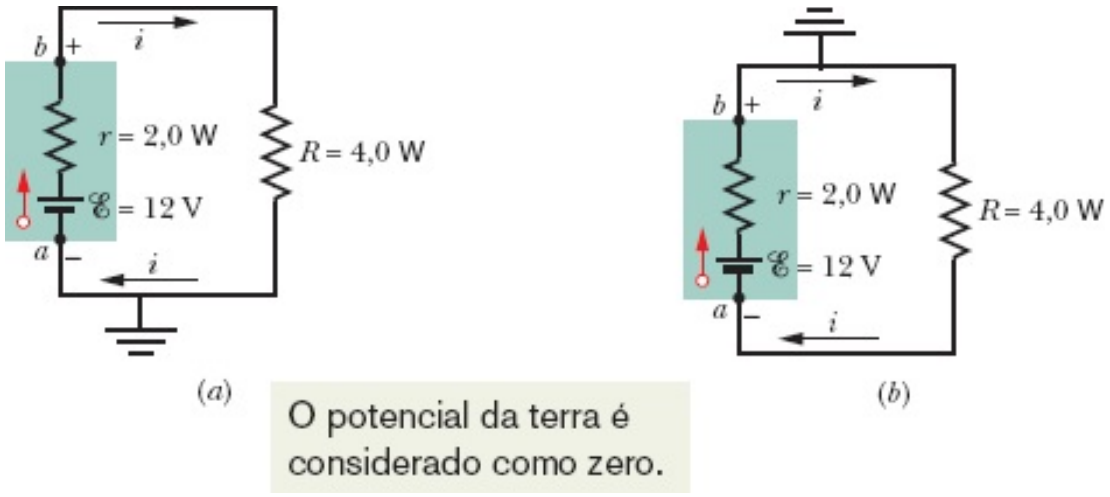
Logo esta bateria terá d.d.p. entre os seus terminais de apenas 8V (a resistência interna está muito alta ou porque a resitência externa é muito pequena).

Note, se $R = 1k\Omega$, teríamos: $i = 12 / (1000 + 2) = 12 / 1002 = 0.01198A = 11.98mA$, e assim:

$$\Delta V_{ab} = 12 - 2 \cdot 0.01198 = 11.98V \approx 12V.$$

2.3. Aterramento de um circuito

Existe um potencial elétrico especial em todo o circuito, chamado de **terra,** onde assumimos o valor zero.



Na esquerda: $V_a = 0$ e $V_b = 12 - 2i$.
Na direita: $V_b = 0$ e assim $V_a + 12 - ri = V_b = 0 \rightarrow V_a = -12 + ri < 0$.
Se a bateria fosse ideal, teríamos (na direita) $V_a = -12V$.

2.4. Potência, potencial e força eletromotriz

Já sabemos que a potência dissipada (energia elétrica trocada com o meio) é dado em geral por

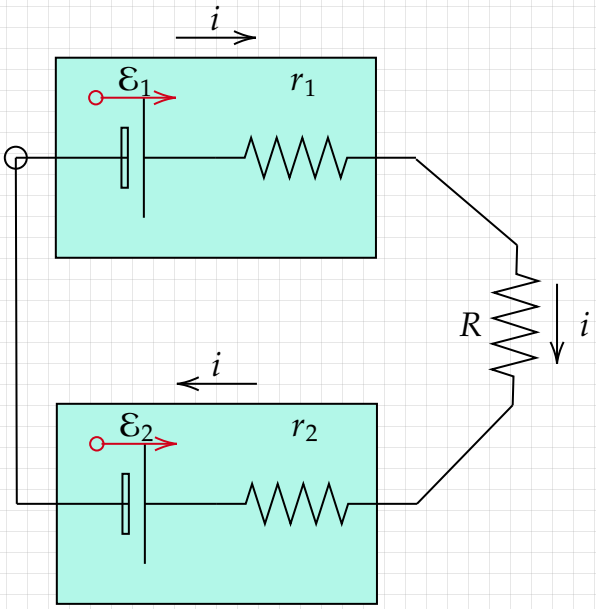
$$P = iV,$$

onde V é a ddp entre os terminais de um componente e i a corrente que passa por ele. Assim, para uma fonte real, temos que considerar a resistência interna:

$$P = i(\mathcal{E} - ir) = i\mathcal{E} - i^2 r,$$

onde $P_r = i^2 r$ é a poência dissipada pela resistência interna da fonte, e $P_{fem} = i\mathcal{E}$ é a potência fornecida pela fonte.

Exemplo: Uma malha e duas fonte reais: E1=4,4V, E2=2,1V, r1=2,3Ohm, r2=1,8Ohm, R=5,5Ohm. Qual é a corrente i no circuito?



Lei das malhas:

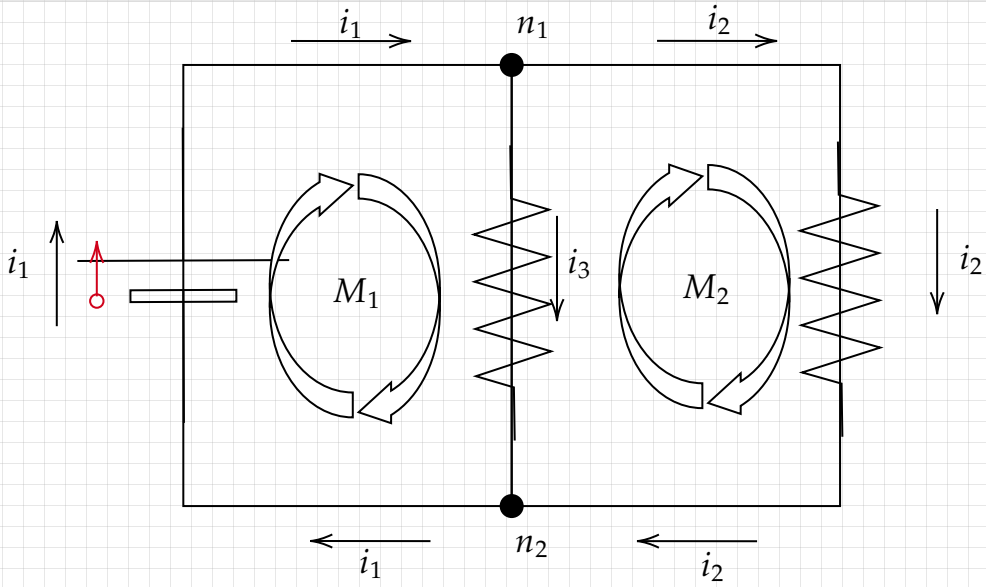
$$\mathcal{E}_1 - ir_1 - iR - ir_2 - \mathcal{E}_2 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = i(r_1 + r_2 + R)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{2.3}{9.6} = 0.24A$$

3. Circuito com mais de uma malha

As malhas compartilham lados que se juntam em **nós (nodos)**. Nos nós ocorre a divisão da corrente elétrica.



Nos nós ocorre a conservação da corrente:

REGRA DOS NÓS (Primeira Lei de Kirchhoff): A soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem.

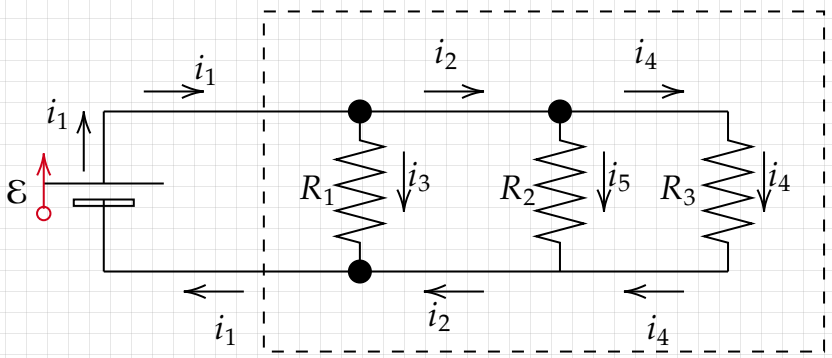
$$\begin{cases} n_1 : i_1 = i_2 + i_3 \\ n_2 : \ i_3 + i_2 = i_1 \end{cases},$$

onde temos dois nós no exemplo, mas observe que ambas as **equações são identicas,** pois não poderia ser diferente: a corrente não tem outra possibilidade de movimento.

3.1. Resistências em Paralelo

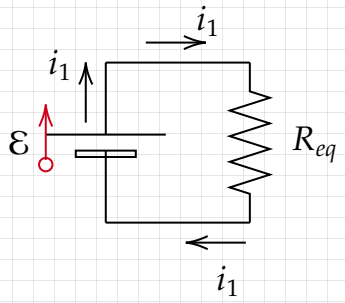
Calcular:

1. qual seria a resistência equivalente neste circuito.



$$i_3 = \frac{V}{R_1},\ i_5 = \frac{V}{R_2},\ i_4 = \frac{V}{R_3}$$

$$i_1 = i_3 + i_5 + i_4 = \left(\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}\right) = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right),$$



Como $V = Ri$, temos que:

$$V = i_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = i_1 R_{eq},$$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1}$$

Resistências em paralelo são combinadas com a Média Harmônica - Inverso da soma dos inversos:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots}.$$

Quando temos apenas **duas resistências**:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

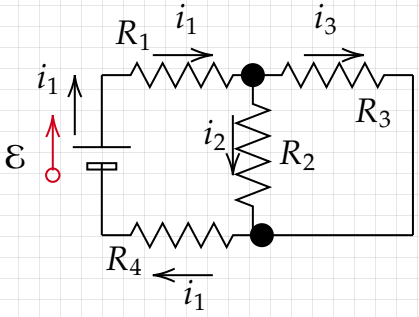
Exemplo:

R1=20 Ohm, R2=20 Ohm, R3=30 Ohm, R4=8,0 Ohm, E=12V.

a) Qual a corrente na fonte?

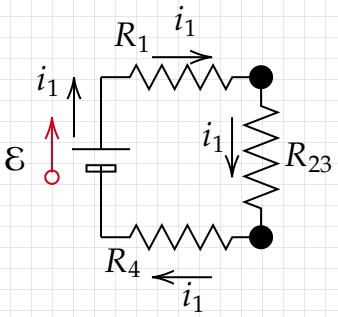
b) Qual é a corrente em R2?
c) Qual é a corrente em R3?

$R_1 = R_2 = 20,\ R_3 = 30,\ R_4 = 8,\ \mathcal{E} = 12$



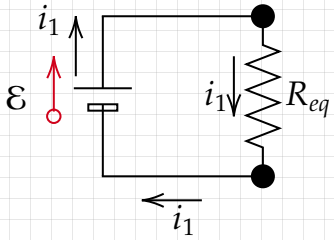
R_2 e R_3 estão em paralelo:

$$R_{23} = (1/20 + 1/30)^{-1} = \\ = ((30+20)/600)^{-1} = \\ = (50/600)^{-1} = \\ = 60/5 = 12\Omega$$



R_1, R_4 e R_{23} estão em série:

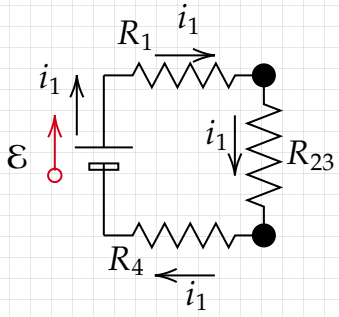
$$R_{eq} = R_1 + R_4 + R_{23} = \\ = 20 + 8 + 12 = 40\Omega$$



A corrente i_1 é:

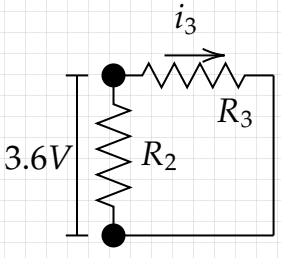
$$\mathcal{E} = R_{eq} i \rightarrow\ i = \frac{\mathcal{E}}{40} = \frac{12}{40} = 0.3A$$

Para sabermo i_2 e i_3 precisamos da queda de potencial em R_{23}.



A queda de potencial em R_{23} é:

$$V_{23} = R_{23} i_1 = 12 \cdot 0.3 = 3.6\text{V}$$



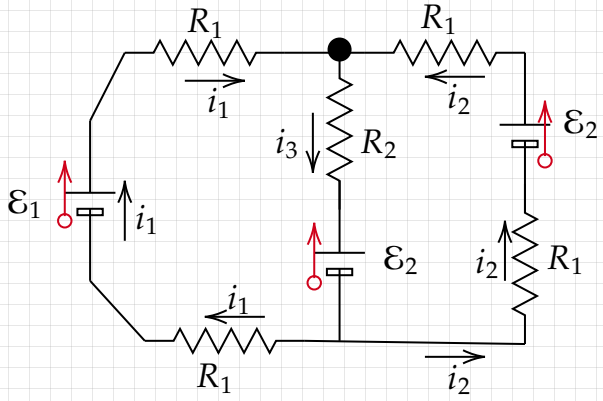
$$V = R_2 i_2 \rightarrow \\ i_2 = 3.6/20 = 0.18A$$

$$V = R_3 i_3 \rightarrow \\ i_3 = 3.6/30 = 0.12A$$

Exemplo: sistema de equações de malhas.

E1=3,0V, R1=2,0Ohm,
E2=6,0V, R2=4,0Ohm

Qual é a corrente nos três ramos.



Na malha esquerda:

$$3 - 2i_1 - 4i_3 - 6 - 2i_1 = 0$$
$$-3 - i_1(2+2) - 4i_3 = 0$$
$$-3 - 4i_1 - 4i_3 = 0$$
$$4i_1 + 4i_3 = -3.$$

Na malha direita - vamos rodar no sentido anti-horário:

$$-R_2 i_3 - \mathcal{E}_2 - R_1 i_2 + \mathcal{E}_2 - R_1 i_2 = 0$$
$$-4i_3 - 6 - 2i_2 + 6 - 2i_2 = 0$$
$$-4i_3 - 4i_2 = 0$$

Lei dos nós:

$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$\begin{cases} 4i_1 & & +4i_3 & = -3 \\ & -4i_2 & -4i_3 & = 0 \\ i_1 & +i_2 & -i_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4i_1 & & +4(i_1+i_2) & = -3 \\ & -4i_2 & -4(i_1+i_2) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8i_1 & +4i_2 & = -3 \\ -4i_1 & -8i_2 & = 0 \end{cases} \rightarrow -8i_2 = 4i_1 \rightarrow i_2 = -\frac{1}{2} i_1$$

$$8i_1 + 4(-1/2 i_1) = (8-2)i_1 = -3 \rightarrow$$
$$6i_1 = -3 \rightarrow i_1 = -0.5A$$

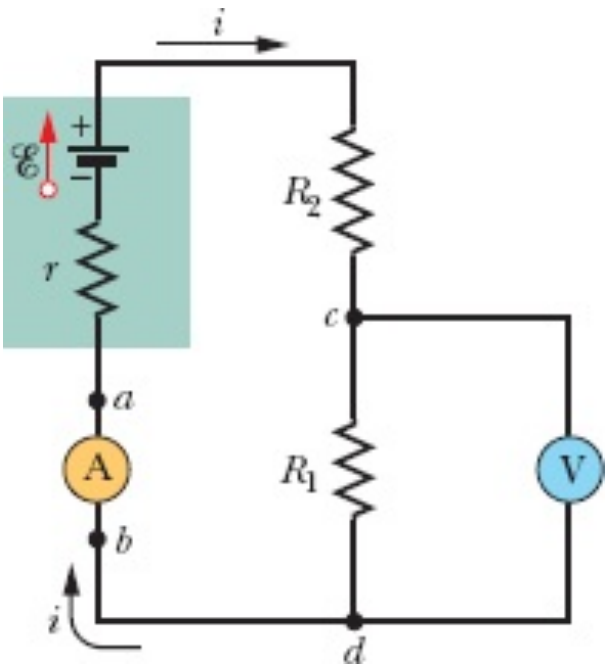
$$i_2 = -0.5 i_1 = 0.25A$$

$$i_1 + i_2 = i_3 \rightarrow -0.5 + .25 = i_3 \rightarrow i_3 = -0.25.$$

Note: i_1 e i_3 são negativas! logo andam para o sentido oposto ao escolhido.

4. Amperímetro e Voltímetro

- Amperímetro: mede a corrente elétrica atraves de um condutor. Tem resistência quase nula.
- Voltímetro: mede a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito. Tem resistência quase infinita.



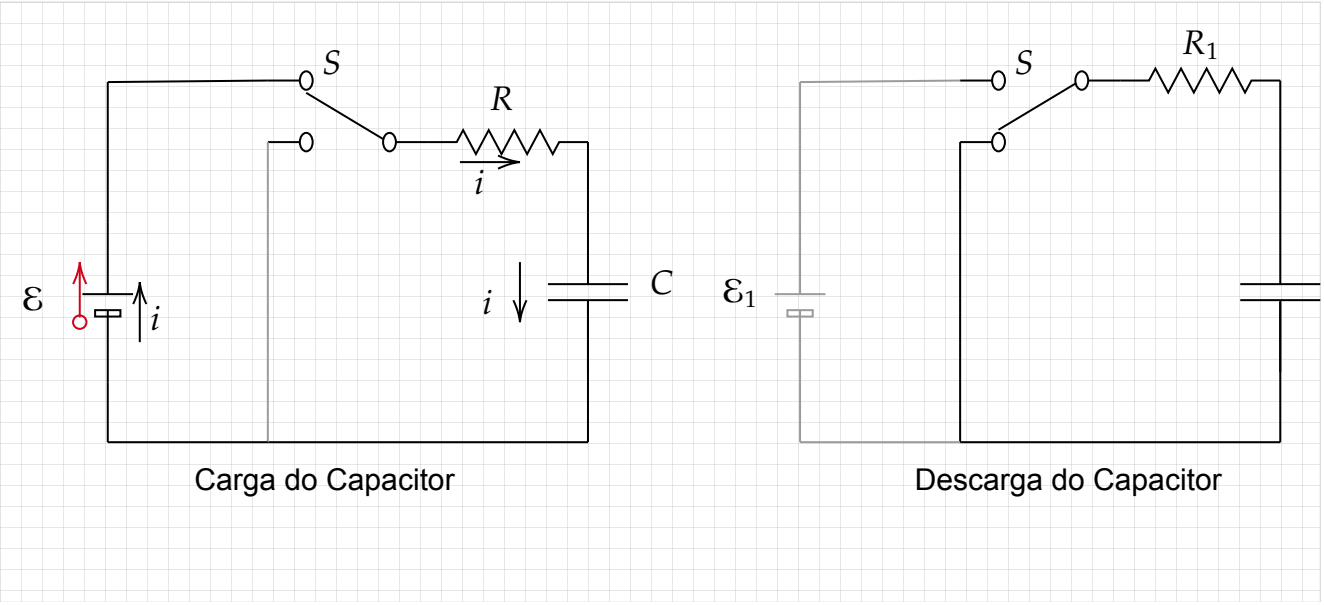
5. Circuitos R-C

Até agora usamos fontes (baterias) e resistores para montar os nossos circuitos. Agora vamos usar o **Capacitor** (que já foi discutido anteriormente).

A **queda de potencial** em um capacitor é dada por:

$$q = CV \rightarrow V = \frac{q}{C},$$

quando vamos da placa positiva para a placa negativa.
Observe o circuito abaixo:



5.1. Carga do Capacitor

Considerar o capacitor **descarregado**:

$$q_{inicial} = 0.$$

Aplicamos a lei das malhas:

$$+\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0,$$

mas as variáveis são a corrente i e a carga no capacitor q. Lembre que a corrente é dada por

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Substituindo, temos:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E},$$

que é uma equação diferencial.

Vamos fazer um "chute" para a solução:

$$q(t) = A + Be^{Dt},$$
$$\dot{q}(t) = BDe^{Dt},$$

então

$$RBDe^{Dt} + \frac{A + Be^{Dt}}{C} = \mathcal{E}.$$

A condição de contorno é:

$$q(0) = 0,$$
$$q(0) = A + Be^{0} = A + B = 0 \rightarrow A = -B,$$

então ficamos com:

$$q(t) = A\left(1 - e^{Dt}\right),$$
$$\dot{q}(t) = -ADe^{Dt}.$$

Colocando na equação diferencial:

$$R\left(-ADe^{Dt}\right) + \frac{A\left(1 - e^{Dt}\right)}{C} = \mathcal{E},$$

em $t = 0$, temos que:

$$R(-AD) + \frac{A(1-1)}{C} = \mathcal{E} \rightarrow -RAD = \mathcal{E} \rightarrow$$
$$AD = -\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Depois de muito tempo $t \approx \infty$, a corrente elétrica i será zero, pois o capacitor estará carregado, e a ddp do capacitor será igual a fem da bateria:

$$V = \frac{q_\infty}{C} = \mathcal{E},$$
$$i_\infty = 0$$

Então, par $t = \infty$ temos:

$$\dot{q}(\infty) = -ADe^{D\infty} = 0,$$

então $D < 0$, e também:

$$q(t_\infty) = A\left(1 - e^{-|D|t}\right) = \mathcal{E}C,$$
$$A = \mathcal{E}C.$$

Finalmente então, temos (trocando o sinal de D):

$$A = \mathcal{E}C,$$
$$AD = (\mathcal{E}C)D = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow D = \frac{1}{RC}$$

voltando para o nosso "chute", temos:

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right),$$
$$i = \frac{-C\mathcal{E}}{-RC}e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}.$$

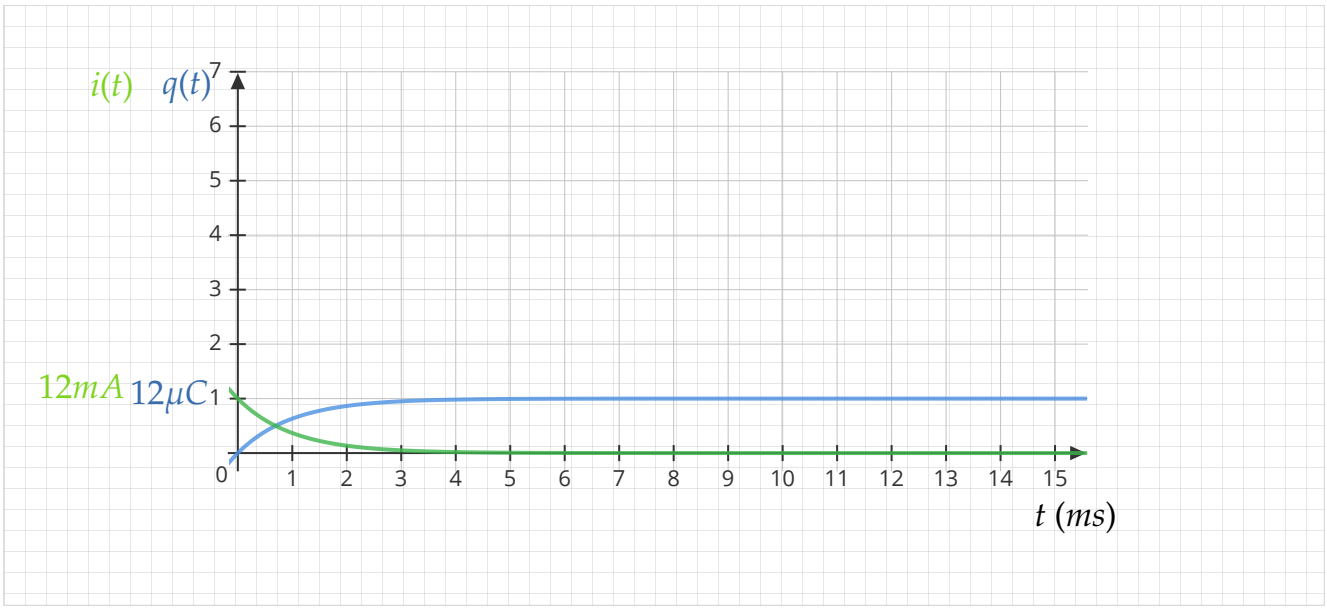
5.2. Constante de Tempo

O valor RC é chamado de Constante de Tempo τ.

$$\tau = RC,$$
$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Por exemplo, se R=1kOhm, C=1μF, $\tau = 0,001s$= 1ms.
Se $\mathcal{E} = 12V$,

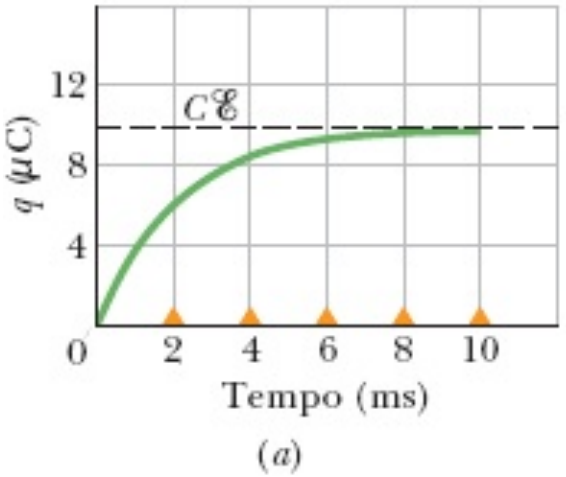
$$q(t) = 12 \times 10^{-6}\left(1 - e^{-t/0.001}\right)$$



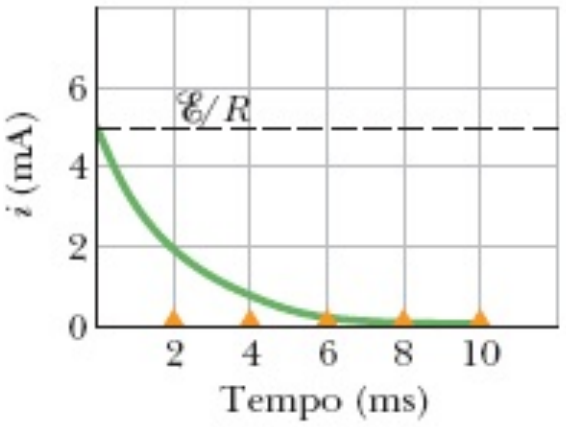
Para a corrente:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = 0.012 e^{-t/1000}.$$

Com o passar do tempo, a carga do capacitor aumenta e a corrente diminui.



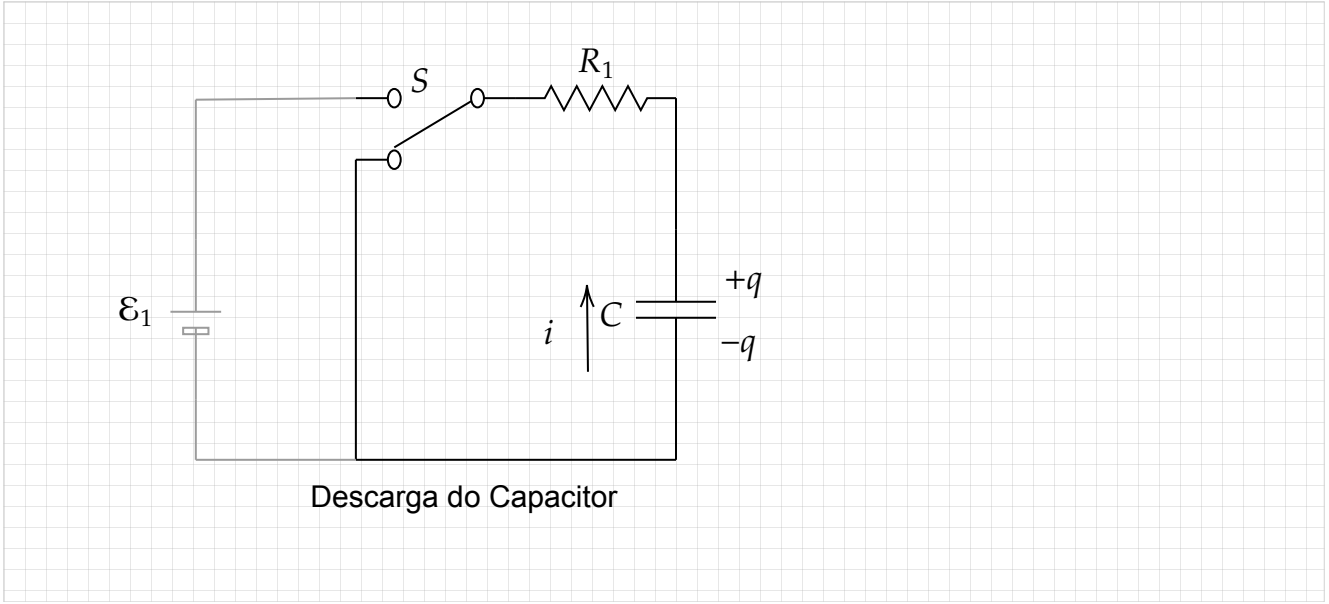
(*a*)



(*b*)

5.3. Descarga do Capacitor

Com capacitor CARREGADO:



Descarga do Capacitor

A equação da malha será:

$$\frac{q}{C} - Ri = 0,$$

note que: $i = -\frac{dq}{dt}$,

pois ele está DESCARREGANDO, então,

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0,$$

$$R\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C} \rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{dt}{\tau},$$

$$\int_{q_0}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

$$\ln(q) - \ln q_0 = -\frac{t}{\tau}$$

$$\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{\tau},$$

$$\frac{q}{q_0} = e^{-t/\tau},$$

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau} = C\mathcal{E}e^{-t/\tau}.$$

Exemplo:

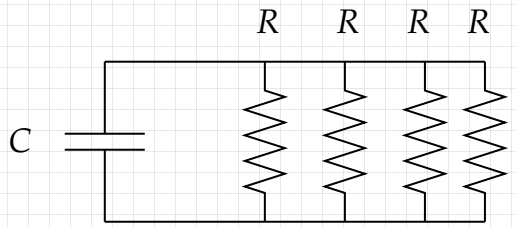
A capacitância entre um carro de corrida e a superfície é de $C = 500pF$.

Para abasterce-lo seguramente, a descarga elétrica tem que ter energia menor do que **50mJ.**

Ao parar, o carro tem uma d.d.p com a pista de $V_0 = 30$kV.

Se a resistência dos pneus é de $R = 100G\Omega$,

qual é o tempo que tem-se que esperar antes de abastercer o carro?



Energia do Capacitor: $U = \frac{q^2}{2C}$

Qual é q_0?

$q_0 = CV_0 = 500 \times 10^{-12} 30 \times 10^3 = 15\mu C.$

A descarga do capacitor é dada por:

$q(t) = q_0 e^{-t/\tau} = 15 \cdot 10^{-6} e^{-t/RC}$,

Qual é a resistência?

$$R_{eq} = \left(4\frac{1}{R}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{10^{11}}\right)^{-1} = \left(4 \times 10^{-11}\right)^{-1} = \frac{1}{4}10^{11} = 25G\Omega$$

Então, a constante de tempo é:

$\tau = RC = 25G \cdot 500p = 12,5s$

$q(t) = 15 \cdot 10^{-6} e^{-t/12.5}$.

Qual é a carga tal que a energia do capacitor seja de $U = 50$mJ ?

$$50 \times 10^{-3} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\left(1.5 \times 10^{-5}\right)^2 e^{-2t/12.5}}{2 \times 500 \times 10^{-12}} = \frac{2.25 \times 10^{-10}}{10^{-9}} e^{-t/6.25} =$$

$$= 0.225 e^{-t/6.25} = 0.05.$$

$$e^{-t/6.25} = 0.222 \rightarrow \frac{-t}{6.25} = \ln 0.222 = -1.51 \rightarrow$$

$t = 9.44s$

Problemas:

**10, **11, **15,

*18, *19, *21, *22, *23, **26,**29,**33, **35,

49,54,

*57, *58,*59, **62, **68