Métodos Numéricos - 16 de Julho de 2021

1. Série de Taylor:

$$f(x+a) \;=\; f(x) \;+\; f'(x)a \;+\; \frac{f''(x)}{2!}a^2 \;+\; \frac{f'''(x)}{3!}a^3 \;+\; \dots \;+\; \frac{f^{(n)}(x)}{n!}a^n \;+\; \dots$$

2. Definição da Derivada de uma função

$$f'(x) \;=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\;-\;f(x)}{h}$$

3. Definição de Derivada Numérica de 1a. ordem

$$f'_h(x) \;=\; \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Erro associado - ver nas matéria. Basta substituir $f(x+h)$ pela série de Taylor dela e fazar simplificações.

4. Exemplos:

$f(x) \;=\; x^2$
$f'(x) \;=\; 2x$
$f'_h(x) \;=\; \left((x+h)^2 \;-\; x^2\right)/\,h \;=\; \left(x^2+2xh+h^2\;-x^2\right)/\,h \;=\; 2x \;+\; h.$

$f(x) \;=\; \sin(\theta)$
$f'(x) \;=\; \cos(\theta)$

$$f_h'(x) = (\sin(\theta + h) - \sin(\theta))/h = (\sin\theta\cos h + \sin h\cos\theta - \sin\theta)/h =$$
$$= \cos\theta(\sin h/h) + \sin\theta(\cos h - 1)/h.$$

Usando Taylor nos termos com h (uma vez que h vai ser pequeno), que são:

$$\cos h = 1 + h^2/2! + h^4/4! + \ldots,$$
$$\sin h = h + h^3/3! + h^5/5! + \ldots,$$

temos então que:

$$f_h' = \cos\theta\left(h + h^3/3! + h^5/5! + \ldots\right)/h + \sin\theta\left(1 + h^2/2! + h^4/4! + \ldots - 1\right)/h =$$
$$= \cos\theta\left(1 + h^2/3! + \ldots\right) + \sin\theta\left(h/2! + h^3/4! + \ldots\right) =$$

$$= \cos\theta + \frac{\sin\theta}{2} h + ... = \cos\theta + O(h).$$

5. Derivada de 2a Ordem

Aqui temos a derivada de 1a e de 2a ordem:

$$f_h{}' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f_{h2}{}' = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Note a pequena diferença. Mostre, usando Taylor, que f'_{h2} é
$f'_{h2}(x) = f'(x) + O\left(h^2\right)$.