$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Ax = B$$

Esta é a versão da equação na forma matricial.

$\det A \ = \ 2{*}1{*}1 \ + \ 0... \ = \ 2$ - Tem inversa.

Eliminação Gaussiana

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ = b_1 & , l_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & , l_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & , l_3 \end{cases} \rightarrow Ax = b$$

Algorítmo para transformar um sistema de 3x3 em um sistema triangular superior:

1. Remover x_1 das equações 2 e 3:
   (a) Dividir as equações 1, 2 e 3 por a_{11}, a_{21}e a_{31} respectivamente:
   $$\begin{cases} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 + a_{13}/a_{11}x_3 \ = \ b_1/a_{11} & , l{*}_1 = l_1/a_{11} \\ x_1 + a_{22}/a_{21}x_2 + a_{23}/a_{21}x_3 = b_2/a_{21} & , l{*}_2 = l_2/a_{21} \\ x_1 + a_{32}/a_{31}x_2 + a_{33}/a_{31}x_3 = b_3/a_{31} & , l{*}_3 = l_3/a_{31} \end{cases}$$
   (b) Subtrair as equações l_2e l_3 por l_1, e multiplacamos cada uma por a_{21} e a_{31} respectivamente (e retornamos primeira equação a sua forma original)
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 & , l_1 \\ (a_{22} - a_{12}(a_{21}/a_{11}))x_2 + (a_{23} - a_{13}(a_{21}/a_{11}))x_3 & = & b_2 - b_1(a_{21}/a_{11}) & , l''_2 \ = (l{*}_2 - l{*}_1 \\ (a_{32} - a_{12}(a_{31}/a_{11}))x_2 + (a_{33} - a_{13}(a_{31}/a_{11}))x_3 & = & b_3 - b_1(a_{31}/a_{11}) & , l''_3 \ = (l{*}_3 - l{*}_1 \end{cases}$$
   Ou, de maneira mais sucinta:
   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & b_1 & , l_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 & = & b'_2 & , l'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 & = & b'_3 & , l'_3 \end{cases}$$
   Note que agora temos NOVOS Coeficientes a' e b'.
2. Remover x_2 da equação 3:
   (a) Dividir as equações 2 e 3 por a_{22} e a_{32} respectivamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & ,l_1 \\ x_2 + a'_{23}\,/\,a'_{22}x_3 &= b'_2\,/\,a'_{22} & ,l'*_2 = l'_2\,/\,a'_{22} \\ x_2 + a'_{33}\,/\,a'_{32}x_3 &= b'_3\,/\,a'_{32} & ,l'*_3 = l'_3\,/\,a'_{32} \end{cases}$$

(b) Subtrair a equação $l'*_3$ por $l'*_2$, e multiplicamos por a'_{32} (e retornamos a segunda equação a sua forma original):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & ,l_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 & ,l'_2 \\ (a'_{33} - a'_{23}(a'_{32}\,/\,a'_{22}))x_3 &= b_3 - b_2(a'_{32}\,/\,a'_{22}) & ,l''_3 = l'*_3 - l'*_2 \end{cases}$$

Ou de maneira mais sucinta:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & ,l_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 & ,l'_2 \\ a''_{33}x_3 &= b''_3 & ,l''_3 \end{cases}$$

E agora temos um sistema triangular superior.

Aqui vamos generalizar o procedimento, que será feito linha por linha:

1. Primeira Iteração - linha 1.
   (a) Deixe a equação 1 de lado (ou seja a primeira linha de A e a primeira linhas de B).
   (b) Subtraia todos os coeficientes das linhas restantes abaixo de 1 $(i > 1)$ por:
      i. Linhas i, coeficiente j: $a^2_{ij} = a_{ij} - a_{1j}\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ e $b^2_i = b_i - b_1\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$

      a^2_{ij}, b^2_i representam os novos coeficientes depois da primeira iteração.
2. Segunda Iteração - linha 2.
   (a) Deixe a equação 2 de lado.
   (b) Subtraia todos os coeficientes das linhas restantes abaixo de 2 $(i > 2)$ por:
      i. Linhas i, coeficiente j: $a^3_{ij} = a^2_{ij} - a^2_{2j}\dfrac{a^2_{i2}}{a^2_{22}}$ e $b^3_i = b^2_i - b^2_2\dfrac{a^2_{i2}}{a^2_{22}}$

      a^3_{ij}, b^3_i representam os novos coeficientes apos a segunda iteração.
3. ETC....
4. Iteração n-1 (linha $n-1$).
   (a) Deixe a equação $n-1$ de lado.
   (b) $a^n_{ij} = a^{n-1}_{ij} - a^{n-1}_{nj}\dfrac{a^{n-1}_{in}}{a^{n-1}_{nn}}$ e $b^n_i = b^{n-1}_i - b^{n-1}_n\dfrac{a^{n-1}_{in}}{a^{n-1}_{nn}}$.
   (c) Para n equações esta será a última iteração, teremos apenas a^n_{nn} e b^n_n.

Os coeficientes a_{ii}^{i} são chamados de "pivot", e são os elementos da diagonal principal durante o processo de eliminação. Se, na iteração i+1, após o passo (b), $a_{ii}^{i} = 0$, então precisamos trocar a equação i (que tem zero como elemento pivot) por uma outra equação mais abaixo com pivot $\neq 0$.

O Algorítmos, de forma mais sucinta é:

Dados de entrada: Matrix $A_{n\times n} = a_{ij},\ B_{n\times 1} = b_i$.

1. Para $i = 1$ até $n-1$, faça: # vai linha por linha i
2. Encontre $l \geq i$ tal que $a_{li} \neq 0$ # encontre a linha l abaixo de i com pivot não nulo
3. Se $a_{ll} = 0$ para todos $l \geq i$, então A não tem inversa! FIM.
4. Troque a linha i pela linha l. # Se $i = l$ essa troca não faz nada.
5. Para $k = i + 1$ até n, faça: # Loop nas linhas abaixo de i
6. $m = \dfrac{a_{ki}}{a_{ii}}$ # coeficiente
7. $b_k = b_k - mb_i$ # novo valor de b para a linhas k
8. Para $j = i + 1$ até n, faça # Loop nos coeficientes da linha k
9. $a_{kj} = a_{kj} - ma_{ij}$ # Novos coeficientes

(No livro está trocado o k e o i, porque eu estou usando i para o índice das iterações.)

Agora vamos traduzir isso para Python.

1a. Avaliação

1. Capacidades básicas:
   (a) Para as pessoas que forem usar Python:
      i. ser capaz de baixar os arquivos "sl.py" e "main.py" e ser capaz de executar o programa "main.py".
   (b) Escrever os algorítmos 2.1 e 2.2 do livro na linguagem de preferência. Estes algorítmos são os programas python "ts" (triangular superior) e "eg" (eliminação gaussiana) contidos no arquivo "sl.py".

2. Modificar o programa de eliminação gaussiana para que ele escolha o maior pivot, de acordo com o algorírmo 2.3 do livro.
   (a) Modifique a parte do programa "eg" de acordo.
   (b)
3. Escreva uma rotina "lu" que implemente a fatoração LU - Algorítmo 2.5. Use a

rotina "eg" como exemplo.

(a) A rotina deve ter um argumento de entrada e dois de saida:
L,U = lu(A)

4. Escreva uma rotina "chol" para implementar a fatoração de cholesky - Algorítmo 2.6.
   (a) A rotina dever ter um argumento de entrada e dois de saida:
   L,D = chol(A)
5. Teste estas rotinas nas matrizes abaixo:

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cheque o resultado da decomposição LU na pg. 41.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$