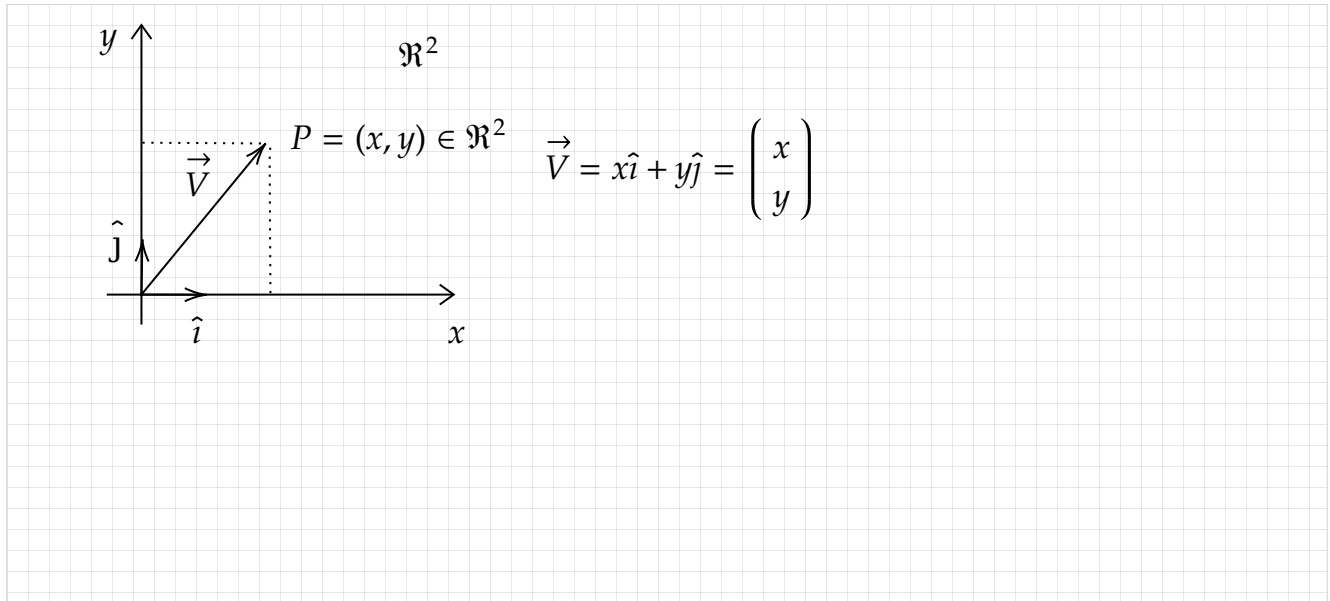


Matrizes e Transformações Lineares

Imagine um plano $\mathbb{R}^2$, com coordenadas (x, y) . Neste sistema de coordenadas o vetor $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são dados por:

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Considere uma matriz $M_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

A ação (multiplicação) da matriz M nos vetores causa uma Transformação Linear:

$$M\hat{i} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ e } M\hat{j} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Em $\mathbb{R}^2$, as transformações lineares podem ser divididas em:

1. Transformação de Escala: $E_\epsilon = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \epsilon I,$

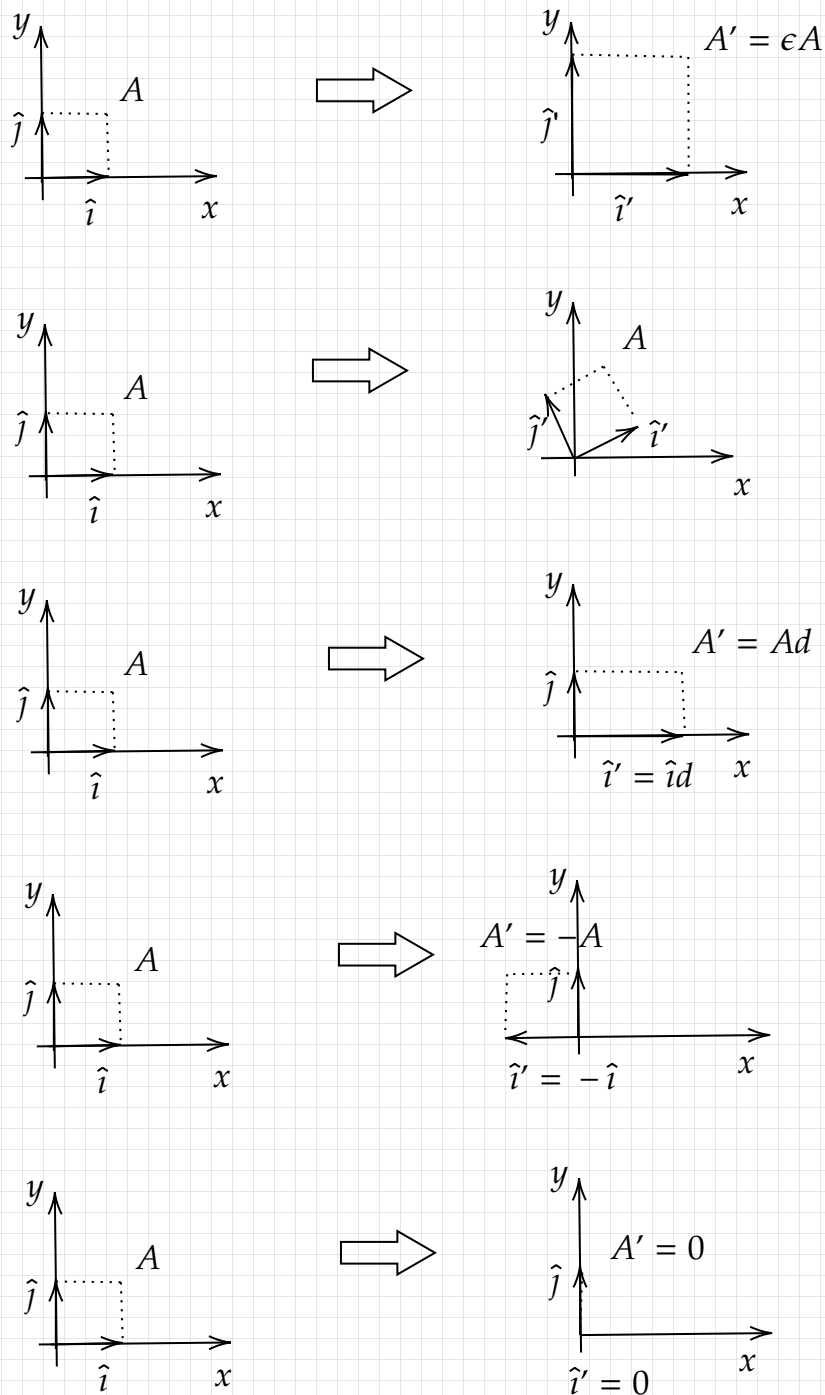
2. Rotações: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$

3. Distorção: $D_d = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

4. Reflexões: $M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $M_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

5. Projeção: $P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Graficamente:



Pode-se provar que qualquer matriz $M_{2 \times 2}$ será um produto dessas matrizes.

O Papel do Determinante

Em duas dimensões, o determinante de uma transformação linear significa o fator multiplicativo na área de um paralelogramo.

Note que (veja exercício) que:

$$\begin{aligned}\det E_\epsilon &= \epsilon, \\ \det R_\theta &= 1, \\ \det D_d &= d, \\ \det M_{x,y} &= -1, \\ \det P_{x,y} &= 0.\end{aligned}$$

Exercício, Calcule o determinantes dessas matrizes para quaisquer valores dos parâmetros.

Se o determinante for zero, significa que uma das dimensões foi transformada para zero, ou seja, vetores em duas dimensões tornam-se vetores em uma única dimensão. Os Projetores são exemplos muito úteis de matrizes de determinante zero.

Note que apenas o PROJETOR não é inversível, pois seu determinante é zero.