Transformações sobre Escalares, Vetores e Matrizes

Vetores (Tensores de Rank 1)

Considere um vetor V. Em termos de vetores de base, temos:

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\,\hat{\jmath} + V_z\hat{k} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z} \rightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix},$$

usando uma notação alternativa para os vetores da base.

Aplicando a transformação M sobre os vetores da base, teremos o efeito desta em V:

$$MV = M(V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}) = V_xM\hat{\imath} + V_yM\hat{\jmath}.$$

Da mesma forma, vendo o vetor como uma matrix coluna: $V = V_{n\times 1}$, e a transformação é vista como uma matrix quadrada: $M = M_{n\times n}$, o resultado será o produto matricial MV.

Diz-se, então, que a transformação de um vetor se dá pela ação (produto) da matrix de transformação nas componentes do vetor:

$$V'_{n1} = M_{nn}V_{n1}.$$

Escalares (Tensores de Rank 0)

Considere um escalar, s. Ele é apenas um número em um ponto, sem "forma geométrica". Assim, umtransformação não causa nenhuma mudança em s. Por isso nada acontece com as componentes de V, acima.

Matrizes (Tensores de Rank 2)

Escalar → Vetor → Tensor
ponto → seta → ???
número → v.coluna → matriz

Agora vamos inventar um objeto geométrico diferente.
Assim como escalares não tem "base", e vetores usam vetores de base $\hat{x}$ e $\hat{y}$, vamos criar um novo elemento geometrico que utiliza **dois** vetores de base lado a lado:

$$\widehat{x}\widehat{x},\ \widehat{x}\widehat{y},\ \widehat{y}\widehat{x},\ \widehat{y}\widehat{y},$$

(esses objetos chamam-se diádicas) por exemplo:

$$T = a\,\widehat{x}\widehat{x} + b\,\widehat{x}\widehat{y} + c\,\widehat{y}\widehat{x} + d\,\widehat{y}\widehat{y}.$$

Este objeto geométrico (seja lá o que ele for) pode ser convenientemente escrito como uma matriz!

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Normalmente tensores são usados em conjunto com vetores, operando um tensor num vetor, obtemos outro vetor:

$$TA \ = \ B \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Como esse objeto se transformaria??
Basta aplicar as transformações nos vetores da base! Por exemplo, considere a diádica de base $\widehat{x}\widehat{y}$,

$$M(\widehat{x}\widehat{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (M\widehat{x})(M\widehat{y}) = \widehat{x}'\widehat{y}'.$$

Escrevendo em formato **matricial**, podemo deixar isso muito mais claro.
As bases podem ser expressar por produtos matriciais, por exemplo:

$$\widehat{x}\widehat{y} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = (\widehat{x})\,(\widehat{y})^T,$$

note que o vetor $\widehat{y}$ está transposto.

Digamos que vamos operar a transformação $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ em $\widehat{x}\widehat{y}$. Primeiro fazemos um a um:

$$\widehat{x}' \ = \ M\widehat{x} = M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\widehat{y},$$

e

$$\widehat{y}' = M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \widehat{x},$$

logo

$$\widehat{x}'\widehat{y}' = 2\widehat{y}\widehat{x},$$

ou matricialmente, usando o transposto:

$$\widehat{x}'\widehat{y}' \ = \ \left(M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\left(M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\widehat{y}\widehat{x}.$$

Isso fica mais fácil se usarmos a representação matricial das diádicas.

Veja que: $(AB)^T \ = B^T A^T$.

Notarmos que a multiplicação do termo da direita tem que ser via o transposto da transformação:

$$\widehat{x}\widehat{y} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \widehat{x}'\widehat{y}' = T' = MTM^T \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ = \ 2\widehat{y}\widehat{x}\,.$$

Assim, considerando a matriz quadrada $A_{n\times n}$ como um objeto geométrico (Tensor de rank 2 em n dimensões), a transformação é definida como:

$$A' = MAM^T.$$

Exemplos de tensores de rank 2 são o Tensor de tensão, o tensor de cisalhamento, elasticidade.

Tensores Rank 2 de Transformacão de vetores

Além das diádicas apresentadas assima, que basicamente se comportam como dois vetores colocados lado-a-lado (usando o transposto), existe uma outra forma de tensor de rank 2 (matrizes) que representam, elas memas, transformacões de vetores:

$$\vec{Y} = M\vec{X},$$

por exemplo, as próprias matrizes que estão realizando as transformações definias acima.
Para que elas transformem de forma correta, a equação de transformação precisa ser ligeiramente modificada, ao invés da matriz transposta, usamos a matriz inversa:

$$M' = WMW^{-1},$$

onde M é a matriz que eu quero transformar, e W é a matriz de transformação.

Resumindo, existem dois tipos de transformações de matrizes (tensores de rank 2):

$$T' = MTM^T,$$
$$M' = WMW^{-1}.$$

Transformações ortogonais

Existe um tipo de transformação especial chamada "transformação ortogonal". Ela não causa mudança entre os ângulos entre os vetores da base, ou seja, no caso dos vetores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$, que são ortogonais entre si, eles continuariam ortogonais depois da transformação.
Na verdade elas são as "rotações", e também reflexões.

A propriedade básica de toda transformação ortogonal, ou matriz ortogonal O é que:

$$O^T = O^{-1},$$

a matriz inversa é a própria matriz transposta:

$$O^T O = O O^T = I.$$

Ex. uma rotação em 2D de um ângulo θ é dada por:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A transformação inversa é gerada pela rotação de um ângulo $-\theta$:

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta^T,$$

que é a transposta.
Isso vale para todos os casos de matrizes ortogonais.

Diagonalização

Para qualquer matriz quadrada sempre existe uma transformação que a leva para uma formá única diagonal:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix},$$

onde M e D são relacionados por:

$$D = PMP^{-1}.$$

Pode-se mostrar que a matriz D é única (exceto pela ordem dos coeficientes e_1 e e_2).