1. Sistemas de Equações Não Lineares

Dadas as variáveis $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, e as funções não lineares $f_1,\ f_2,\ \ldots, f_n$, o sistema

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_3(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \end{cases},$$

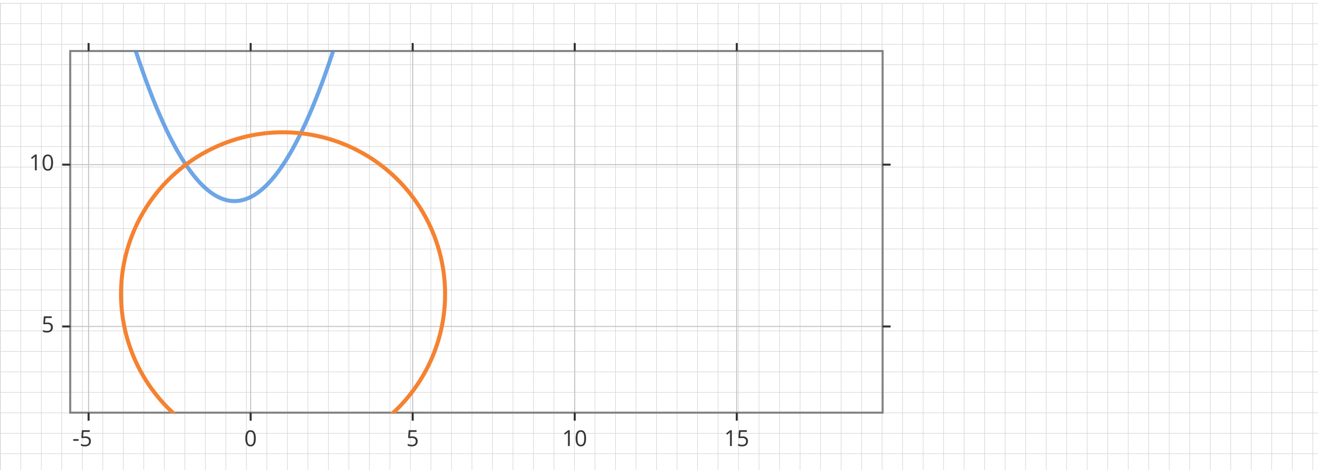
forma um sistema de equações não-lineares.

Estes sistemas, em princípio, podem não ter nenhuma solução em geral e podem ser de difícil resolução. No entanto há vários métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas, se existirem.

Por exemplo, considere:

$$\begin{cases} -x_1(x_1+1)+2x_2 & = & 18 \\ (x_1-1)^2+(x_2-6)^2 & = & 25 \end{cases}$$

Esse sistema tem solução, é a interseção de um círculo de raio 5, com centro no ponto (1,6), com uma parábola $x_2 = \ .5x_1^2+.5x_1+9$, graficamente:



Mas nem sempre podemos ter essa representação gráfica.

O procedimento de resolucão fica mais simples se utilizarmos notação vetorial:

- Um vetor de variáveis: $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$,
- Um vetor de funções: $\vec{F} = (f_1(\vec{x}),\ f_2(\vec{x}),\ \ldots,\ f_n(\vec{x}))$, ou uma função vetorial: $\vec{F}(\vec{x})$.
- O sistema de equações então se traduz para:

  $\vec{F}(\vec{x}) = 0,$

  ou em componentes: $F_i(\vec{x})\ = \ 0.$

2. Método de Newton

Vamos aplicar o Método de Newton para resolver esta equação.

Para isso precisamos calcular a "derivada" de $\vec{F}(\vec{x})$, e faremos componente por componente de $\vec{F}$.

Cada componente $f_i(x_1,..., x_n)$, vai ter n derivadas parciais:
$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2},....$ ou de forma mais sucinta, vamos arrumar as n derivadas das n componentes de $\vec{F}$, em uma matriz n por n.
As componentes sendo:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

ou arrumando matricialmente:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

Essa é chamada de **Matriz Jacobiana.**

Vamos fazer a expansão de Taylor para $\vec{F}(x+a)$, e buscar o valor de a para fazer $\vec{F} = 0$: (componentes)

$$f_i(\vec{x}+\vec{a}) = f_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_j - a_j) + \ ... \ = 0.$$

Ou usando a matriz Jacobiana e mantendo apenas a primeira ordem:

$$\vec{F}(\vec{x}) + J\,(\vec{x} - \vec{a}) = 0.$$

Multiplicando pela esquerda com a inversa da matriz Jacobiana, J^{-1}, temos então:

$$\begin{aligned} \vec{x} - \vec{a} &= J^{-1}F \\ \vec{a} &= \vec{x} - J^{-1}\vec{F} \end{aligned}.$$

2.1. Exemplo:

Vamos calcular o ponto de interseção mais a direita do sistema dado no começo:

$$\begin{cases} -x_1(x_1+1) + 2x_2 - 18 &= 0 \\ (x_1-1)^2 + (x_2-6)^2 - 25 &= 0 \end{cases}$$

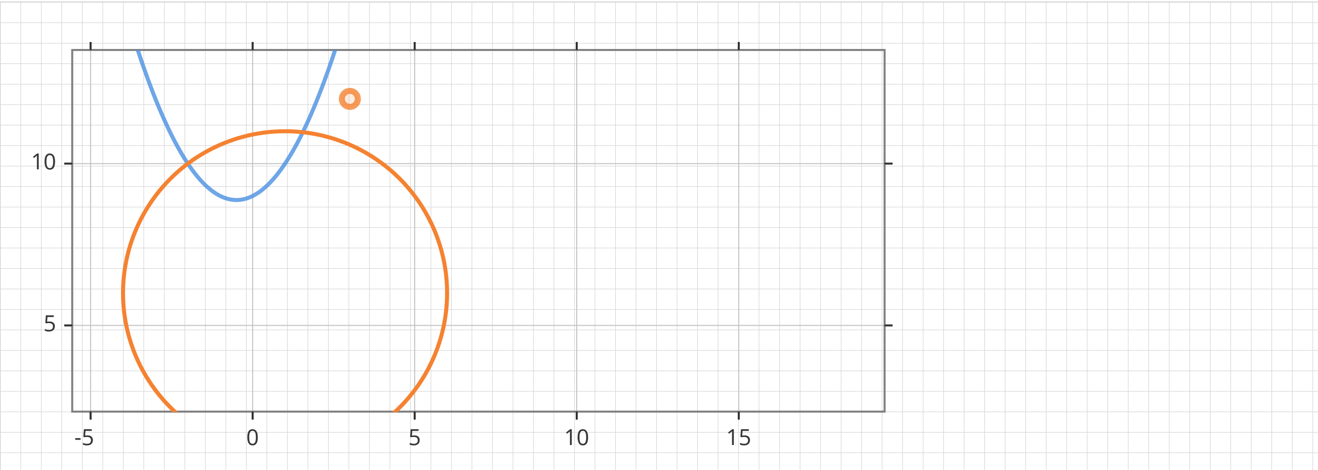
Na forma vetorial, temos:
O vetor F:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -x_1(x_1+1) + 2x_2 - 18 \\ (x_1-1)^2 + (x_2-6)^2 - 25 \end{pmatrix}$$

A matriz Jacobiana J:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 - 1 & 2 \\ 2x_1 - 2 & 2x_2 - 12 \end{pmatrix}.$$

Vamos começar nosso processo no ponto inicial $x_0 = (3, 12)$.



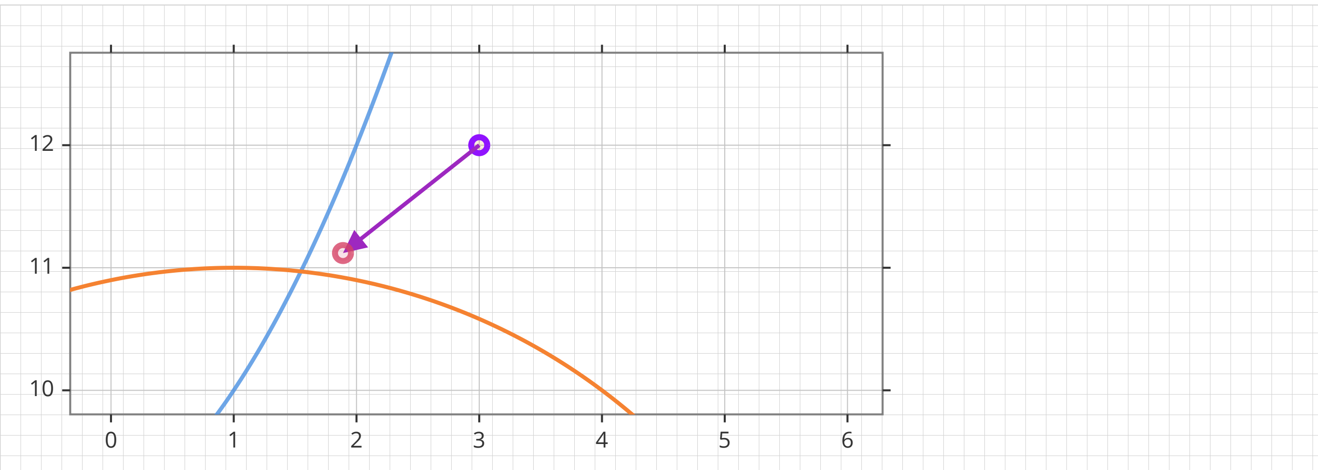
Iteração 1:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix},$$

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}, \; J^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} -0.13 & 0.022 \\ 0.044 & 0.076 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_0 - J^{-1}F \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.13 & 0.022 \\ 0.044 & 0.076 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.89 \\ 11.12 \end{pmatrix}$$



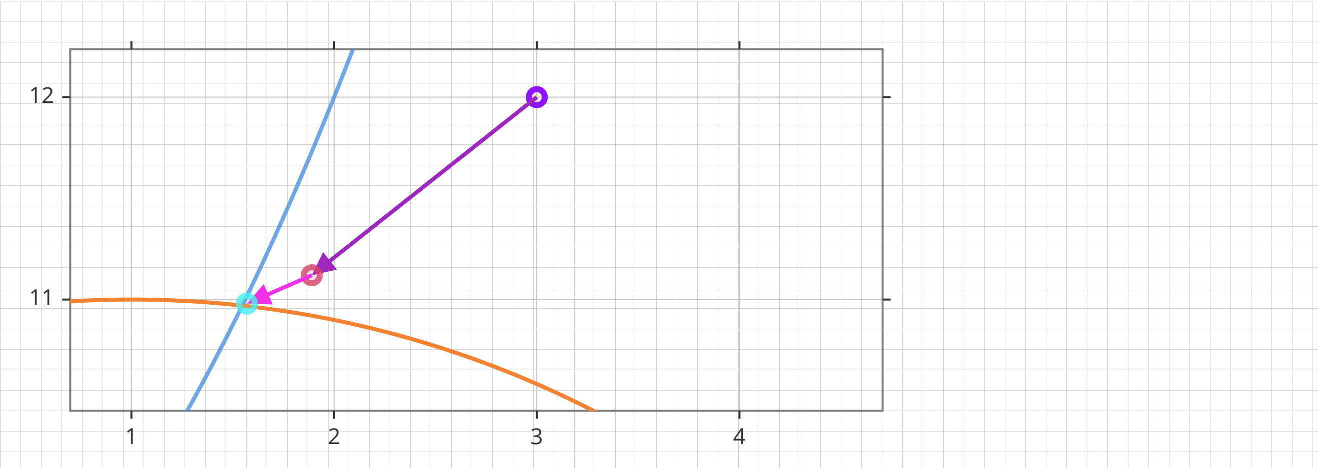
Iteração 2:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.89 \\ 11.12 \end{pmatrix},$$

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} -1.22 \\ 2.00 \end{pmatrix},$$

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} -4.78 & 2 \\ 1.78 & 10.24 \end{pmatrix},\ J^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} -0.195 & 0.0381 \\ 0.0339 & 0.091 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 - J^{-1}F \rightarrow \begin{pmatrix} 1.89 \\ 11.12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.195 & 0.0381 \\ 0.0339 & 0.091 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1.22 \\ 2.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57 \\ 10.98 \end{pmatrix},$$



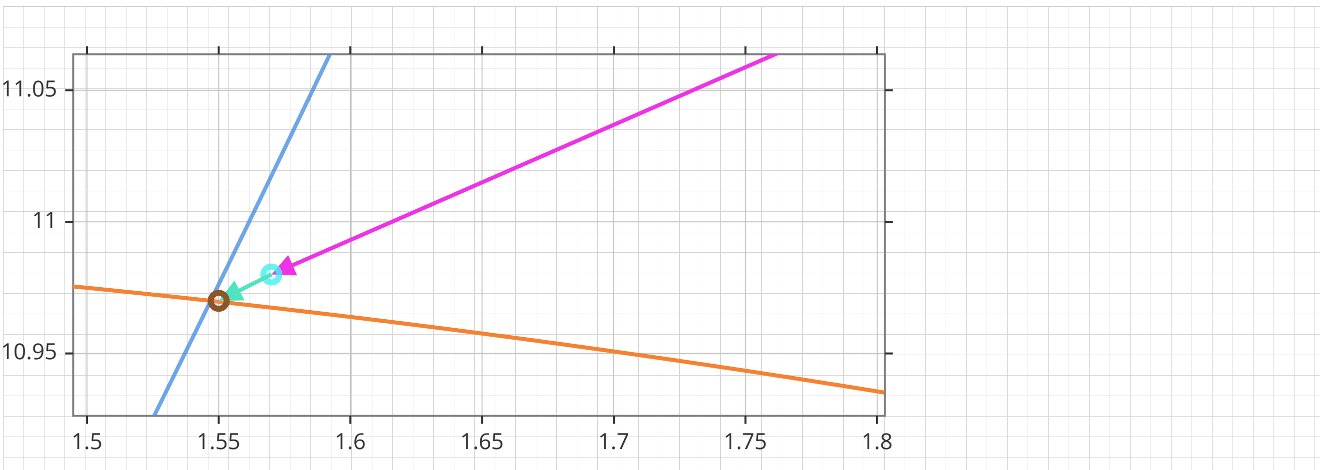
Iteração 3:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.57 \\ 10.98 \end{pmatrix},$$

$$F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.0749 \\ 0.1253 \end{pmatrix}$$, (estão se aproximando de zero!)

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} -4.14 & 2 \\ 1.14 & 9.96 \end{pmatrix}$$, (está ficando constante!)

$$x_3 = x_2 - J^{-1}F = \begin{pmatrix} 1.55 \\ 10.97 \end{pmatrix}$$, (está ficando constante, já na 1a casa decimal).



2.2. Cuidados

O procedimento realizado assima pode ser resumido com:

1. Escolha um ponto inicial $\vec{x}_0$,
2. Calcule a matriz jacobiana J, neste ponto.
3. Resolva o sistema linear: $J(x_0)(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = -\vec{F}(x_0)$.

Quando escolher um ponto inicial é necessário checar se o Jacobiano não é singular ou próximo de singular, isso fará a solução pular para um ponto distante.

O sistema a ser resolvido pode ser resolvido usando a inversa ou eliminação gaussiana.

As vezes esquecemos o sinal de menos (-) em 3. Quando isso acontece, os seus valores de $x_1,\ x_2$, ... vão explodir.

3. Algoritmo

O algorítmo do método de newton para sistemas não-lineares é assim:

Dada as funções f_i, suas derivadas $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ (a matrix jacobiana), e o ponto inicla x_0, e N (o número máximo de iterações permitidas)

- Para $k = 1 : N_{max}$
  - Para $i = 1 : n$
    - Calcule $f_i = f_i(x_{k-1})$,
    - Para $j = 1 : n$
      - Calcule o Jacobiano: $J_{ij} = \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_{k-1}}$
  - Resolva o sistema: $J\vec{v} = -F$ (eliminação gaussiana ou com a inversa)
  - Calcule: $\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \vec{v}$
  - Se $\max|f_i(\vec{x}_k)| < \epsilon,\ x* = x_k$, PARE. (critério 1)
  - Se $\max|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}| < \epsilon,\ x* = x_k$, PARE (critério 2)